JOURNAL OF ALGEBRA **193**, 41–74 (1997)
ARTICLE NO. JA966998

Racines orthogonales et orbites d'algèbres de Lie semi-simple graduées

Iris Muller

Département de Mathématique, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S. (URA 01), 67084 Strasbourg Cedex, France

Communicated by Robert Steinberg

Received February 13, 1996

We define a particular class of regular prehomogeneous vector spaces of parabolic type in relation with orthogonal roots, on a field of characteristic 0. We give the structure and the orbits of simple elements associated to the nonzero nilpotent elements of the prehomogeneous vector spaces in terms of these orthogonal roots.

1. INTRODUCTION

Soit $\mathbb{F}$ un corps de *caractéristique* 0. On considère une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, définie sur $\mathbb{F}$, semi-simple, de dimension finie, munie d'une graduation

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i \qquad \left([\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \right).$$

Les dérivations de $\mathfrak{g}$ étant intérieures, il existe un unique élément H_0, appartenant à $\mathfrak{g}_0$, qui définit la graduation i.e.

$$\mathrm{ad}(H_0)/\mathfrak{g}_i = i \,\mathrm{Id}/\mathfrak{g}_i.$$

$\mathfrak{g}_0$ est réductive dans $\mathfrak{g}$ [2, Lemma 2, Sect. 1, No. 3, Chap. VII].

Soient G le centralisateur de H_0 dans le groupe $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont élémentaires sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$, G_e le groupe des automorphismes élémentaires de $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ qui centralise donc H_0 (on a les inclusions suivantes: $G_e \subset G$), G opère sur chaque $\mathfrak{g}_i$; on considère le triplet $(G = (\mathrm{Aut}_0 \mathfrak{g})_{H_0}, \mathrm{Ad}, \mathfrak{g}_1)$, que l'on note indiffèremment $(G, \mathfrak{g}_1)$ ou de manière infinitésimale $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ (ou encore $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$

0021-8693/97 $25.00

lorsqu'on désire mettre en évidence l'élément définissant la graduation) appelé abusivement préhomogène de type parabolique, en effet $\overline{\mathbb{F}}$ étant une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, alors $(\overline{G} = (\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}})_{H_0}, \mathrm{Ad}, \mathfrak{g}_1 \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}} = \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est un préhomogène de type parabolique au sens usuel c'est à dire ayant une orbite *Zariski*-ouverte; $\bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. $(G, \mathrm{Ad}, \mathfrak{g}_1)$ est alors une $\mathbb{F}$-forme de $(\overline{G}, \mathrm{Ad}, \overline{\mathfrak{g}}_1)$.

Rappelons qu'un sl_2-triplet est un triplet (x, h, y) d'éléments de $\mathfrak{g}$, différent de $(0, 0, 0)$ et vérifiant les relations de commutation suivantes:

$$[x, y] = -h, \qquad [h, x] = 2x, \qquad [h, y] = -2y$$

[2, Sect. 11, No. 1, Chap. VIII] et il est bien connu que pour tout x non nul appartenant à $\mathfrak{g}_i$, i non nul, il existe h appartenant à $\mathfrak{g}_0$ et y appartenant à $\mathfrak{g}_{-i}$ tels que (x, h, y) soit un sl_2-triplet (c'est une généralisation du théorème de Jacobson–Morozov).

DEFINITION 1.1. Un élément h est dit 1-simple si il existe un sl_2-triplet (x, h, y) tel que x (resp. y) soit dans $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_{-1}$). Un tel sl_2-triplet est appelé 1-*adapté*.

Le résultat suivant (qui est une variante de [2, Proposition 1, Sect. 11, No. 1, Chap. VIII]) est classique.

PROPOSITION 1.2. *Deux sl_2-triplets (x, h, y) et (x', h', y') 1-adaptés sont G conjugués si et seulement si x et x' le sont.*

Lorsque $\mathbb{F}$ est algébriquement clos, pour que deux sl_2-triplets (x, h, y) et (x', h', y') 1-adaptés soient G conjugués, il faut et il suffit que h et h' soient.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{g}$ contenant H_0 (ou ce qui revient au même une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{g}_0$). On note Δ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$; il est également gradué par H_0:

$$\Delta_i = \{\lambda \in \Delta \mid \lambda(H_0) = i\}.$$

L'ordre considéré est toujours tel que toute racine de Δ_i, $i > 0$ soit positive. W est le groupe de Weyl associé à Δ et $W_0 = \{w \in W \mid w(H_0) = H_0\}$ celui associé à Δ_0.

Le but de ce travail est de décrire la structure et de donner les orbites 1-simples des préhomogènes $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ pour lesquels il existe des racines de Δ_1 deux à deux orthogonales dont la somme des co-racines vaut $2H_0$ (préhomogènes dit "faiblement commutatif"). Ces préhomogènes ont une structure simple qui géneralise celle des préhomogènes commutatifs réguliers de type parabolique. Les démonstrations se font simplement par récurrence.

La description par paragraphe est la suivante.

Dans le paragraphe 2, à l'aide de [13] on montre qu'il existe une injection de l'ensemble des orbites 1-simples dans l'ensemble $W_0 \setminus W/W_0 - W_0$ (théorème 2.3) et que toute orbite 1 simple est associée à un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales de $\bigcup_{i \geq 1} \Delta_i$ (proposition 2.5).

Ceci amène à définir dans le paragraphe 3 les différents types de préhomogènes suivant que les racines de Δ_1 deux à deux orthogonales dont la somme des co-racines vaut $2H_0$ soient fortement orthogonales (type quasi-commutatif) ou bien qu'il existe des sl_2-triplets qui commutent deux à deux ayant comme élément 1-simple ces co-racines (cas presque-commutatif).

Dans le paragraphe 4 on montre que $\Delta_i = \emptyset$ pour $i \geq 3$ et on décrit Δ (lemmes 4.2, 4.3 et proposition 4.4) ainsi que $W_0 \setminus W/W_0 - W_0$ (propositions 4.5 et 4.7). On retrouve ainsi des résultats analogues à ceux de [7] et de [8]. On décrit également les orbites 1-simples dans le cas presque déployé (proposition 5.2.5) et dans le cas presque-commutatif (corollaire 4.6).

Le paragraphe 5 est consacré à l'étude du cas particulier ou toutes les racines orthogonales dont la somme des co-racines vaut $2H_0$ sont également 1-minimales (définition dans le paragraphe 3). Dans ce cas la structure et les orbites sont décrites par un système de racines restreint (lemma 5.1.2).

On y montre également que les préhomogènes faiblement commutatifs sont associés à des-sous-algèbres paraboliques maximales (proposition 5.1.1).

Dans le paragraphe 6 on donne la liste des préhomogènes concernés en termes de systèmes de racines pour la commodité du lecteur.

Certains résultats de ce travail sont inspirés de [6] et de [8].

2. SUR LES ORBITES 1-SIMPLES DANS LE CAS GRADUÉ

On reprend les notations de l'introduction. On note ϵ l'application naturelle de $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ dans W, alors $W_0 = \epsilon(\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})_{H_0})$ et l'action de $\mathrm{Ker}(\epsilon)$ restreinte à $\mathfrak{a}$ se réduit à l'identité.

Indiquons deux résultats classiques

LEMME 2.1. *Soient $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ et g un automorphisme de $\mathfrak{g}$ tels que $g^{-1}(\mathfrak{c})$ soit inclus dans $\mathfrak{a}$ alors il existe un automorphisme élémentaire g', centralisant $\mathfrak{c}$ tel que $g'g$ normalise $\mathfrak{a}$.*

Démonstration. On considère l'algèbre réductive

$$E_0(\mathfrak{c}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [c, x] = 0 \ \forall c \in \mathfrak{c}\} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta, (\alpha/\mathfrak{c}) = 0} \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus E_0(\mathfrak{a})$$

alors $\mathfrak{a}$ et $g(\mathfrak{a})$ sont deux sous-algèbres abéliennes déployées maximales de cette algèbre donc elles sont conjuguées par un élément de $\mathrm{Aut}_e(E_0(\mathfrak{c}))$ [12, Theorem 2, p. 27] ainsi il existe g' appartenant à $\mathrm{Aut}_e(E_0(\mathfrak{c}))$ tel que $(g'g)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ et $g'(c) = c$ pour tout c de $\mathfrak{c}$. ∎

LEMME 2.2. *Soit h un élément* 1-*simple alors il existe g dans G_e et h' dans $\mathfrak{a}$ tels que $g(h) = h'$.*

Démonstration. On procède comme dans le lemme 2.1 en considérant $\mathfrak{a}'$ une sous-algèbre abélienne déployée maximale contenant la sous-algèbre abélienne déployée $\mathbb{F}h \oplus \mathbb{F}H_0$; $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont deux sous-algèbres abéliennes déployées maximales de $\mathfrak{g}_0$ donc elles sont conjuguées par $\mathrm{Aut}_e([\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0])$ d'où le résultat. ∎

THEOREME 2.3. *Il existe une injection naturelle de* {*l'ensemble des orbites de G dans les éléments* 1-*simples*} *dans* {*l'ensemble des représentants d'ordre* 2 *de* $W_0 \setminus W/W_0$}.

Démonstration. Soit h un élément 1-simple appartenant à $\mathfrak{a}$, (x, h, y) un sl_2-triplet 1-adapté, $\theta_{x,h,y} = \exp(\mathrm{ad}(x))\exp(\mathrm{ad}(y))\exp(\mathrm{ad}(x))$ l'automorphisme élémentaire associé. On a alors les relations suivantes:

$$\theta_{x,h,y}(h) = -h, \qquad \theta_{x,h,y}(H_0) = H_0 - h. \tag{$*$}$$

Par le lemme 2.1 appliqué à la sous-algèbre $\mathfrak{c} = \mathbb{F}h \oplus \mathbb{F}H_0$ de $\mathfrak{a}$, il existe g dans G centralisant $\mathfrak{c}$ tel que $(g\theta_{x,h,y})(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. Soit $g' = g\theta_{x,h,y}$ alors $g' \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ vérifie les relations $(*)$.

On a ainsi montré qu'à tout élément 1-simple h appartenant à $\mathfrak{a}$ on peut associer au moins un automorphisme, noté encore par abus θ_h, de $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ vérifiant les relations $(*)$.

Soient h et h' deux élements 1-simples appartenant à $\mathfrak{a}$, situés dans une même orbite de G (donc en fait par le lemme 2.1 dans une même orbite de $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})_{H_0}$) et $\theta_h, \theta_{h'}$ deux automorphimes de $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ vérifiant les propriétés $(*)$, on a alors en notant g l'élément de $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})_{H_0}$ tel que $g(h) = h'$:

$$(\theta_h)^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \theta_{h'}(H_0) = (\theta_h)^{-1} \cdot g^{-1}(H_0 - h') = (\theta_h)^{-1}(H_0 - h) = H_0$$

donc

$$\epsilon\big((\theta_h)^{-1}\cdot g^{-1}\cdot\theta_{h'}\big)=\epsilon(\theta_h)^{-1}\cdot\epsilon(g)^{-1}\cdot\epsilon(\theta_{h'})\in W_0$$

d'où

$$W_0\epsilon(\theta_h)W_0=W_0\epsilon(\theta_{h'})W_0$$

ainsi à chaque orbite d'éléments 1-simples on peut faire correspondre, par le lemme 2.2, une double classe $W_0\epsilon(\theta_h)W_0$.

Nous verrons dans la proposition 2.5, que l'on peut prendre θ_h de la forme $\prod_{1\le i\le r}\theta_{h_{\beta_i}}$, les racines β_i, $1\le i\le r$ étant des racines deux à deux fortement orthogonales de $\bigcup_{i\ge 1}\Delta_i$, alors $\epsilon(\prod_{1\le i\le r}\theta_{h_{\beta_i}})=\prod_{1\le i\le r}s_{\beta_i}$ est un représentant d'ordre deux.

Cette application est trivialement injective car l'égalité de deux doubles classes de la forme précédente se traduit par une égalité de la forme:

$$\epsilon(g_1\theta_h\cdot g_2)=\epsilon(\theta_{h'}),\qquad g_1,g_2\in\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g},\mathfrak{a})_{H_0}.$$

Il suffit alors de calculer $g_1\theta_h\cdot g_2(H_0)=H_0-g_1(h)$ et $\theta_{h'}(H_0)=H_0-h'$, or ces deux quantités sont égales donc $g_1(h)=h'$, ainsi h et h' sont dans la même orbite. ∎

COROLLAIRE 2.4. *Soit $\mathbb{F}$ algébriquement clos, il existe une injection naturelle de* {*l'ensemble des orbites de G dans $\mathfrak{g}_1$*} *dans* {*l'ensemble des représentants d'ordre inférieur ou égal à 2 de $W_0\backslash W/W_0$*}.

Démonstration. A l'orbite nulle on associe W_0. Comme $\mathbb{F}$ est algébriquement clos, les orbites de G dans $\mathfrak{g}_1-\{0\}$ sont en bijection avec les orbites de G dans les éléments 1-simples (proposition 1.2), il suffit alors d'appliquer le théorème précédent. ∎

PROPOSITION 2.5. *Pour tout h 1-simple il existe g dans G et des racines $\beta_1,\dots,\beta_r$, deux à deux fortement orthogonales de $\bigcup_{i\ge 1}\Delta_i$ telles que $gh=\sum_{1\le i\le r}\beta_i(H_0)h_{\beta_i}$.*

Démonstration. (1) Pour ceci on reprend la construction des "supports" d'éléments nilpotents selon Vinberg [13] que l'on redonne ci-dessous pour la commodité du lecteur.

Complétons h en un sl_2*-triplet* 1-adapté (e,h,v), soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre abélienne, déployée, maximale de $\mathfrak{z}_{(e,h,v)}$, centralisateur de la t.d.s $\mathbb{F}e\oplus\mathbb{F}h\oplus\mathbb{F}v$ contenant $h-2H_0$, on peut compléter $\mathfrak{h}$ en une sous-algèbre abélienne, déployée, maximale, $\mathfrak{a}'$, de $\mathfrak{g}_0$. Le centralisateur de $\mathfrak{h}$, $E_0(\mathfrak{h})$ est une algèbre réductive dont le centre contient $H_0-h/2$ et dont on note $\mathfrak{s}$ la partie semi-simple, qui est appelée support de e; comme (e,h,v) est dans $\mathfrak{s}$, la graduation $\mathfrak{s}_i=\mathfrak{s}\cap\mathfrak{g}_i$ est donnée par l'élément $h/2$; le préhomogène $(\mathfrak{s}_0,\mathfrak{s}_1,h/2)$ est tel que h est 1-simple au sens de $(\mathfrak{s}_0,\mathfrak{s}_1)$.

Comme $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont dans la même orbite de G, il existe $g \in G$ tel que $g(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}$, le *$sl_2$-triplet* 1-adapté $(e' = g(e), h' = g(h), v' = g(v))$ est tel que $\mathfrak{Z}_{(e',h',v')} = g(\mathfrak{Z}_{(e,h,v)})$ or $\mathfrak{h}' = g(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre abélienne, déployée, maximale de $\mathfrak{Z}_{(e',h',v')}$ incluse dans $\mathfrak{a}$ d'où

$$E_0(\mathfrak{h}') = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{h}')} \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus E_0(\mathfrak{a}) \qquad \text{avec } \Delta(\mathfrak{h}') = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(\mathfrak{h}') = 0\}.$$

$\mathfrak{s}'$ le support de e' est donné par:

$$\mathfrak{s}' = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{h}')} \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus E_0(\mathfrak{a}) \bigcap \mathfrak{s}'.$$

Remarquons que le centralisateur de e' dans $E_0(\mathfrak{h}')$ est également le centralisateur de la t.d.s $\mathbb{F}e' \oplus \mathbb{F}h' \oplus \mathbb{F}v'$ dans $E_0(\mathfrak{h}')$ et par conséquent le centralisateur de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{Z}_{(e',h',v')}$ d'où la dimension de $\mathfrak{h}'$ est égale au rang du centralisateur de e' dans $E_0(\mathfrak{h}')$ donc $\mathrm{rang}(\mathfrak{s}'_{e'}) = 0$.

Chaque idéal $(\mathfrak{s}')^i$ de $\mathfrak{s}'$ correspond à une composante irréductible $\Delta(\mathfrak{h}')^i$ de $\Delta(\mathfrak{h}')$, h' est alors la somme des éléments h'^i de $((\mathfrak{s}')_0)^i$ donnant la graduation à $(\mathfrak{s}')^i$. Les différentes composantes irréductibles $\Delta(\mathfrak{h}')^i$ sont 2 à 2 fortement orthogonales dans Δ car $\Delta(\mathfrak{h}')$ est une partie close de Δ. Chaque préhomogène $((\mathfrak{s}')_0^i, (\mathfrak{s}')_1^i, h'^i/2)$ est encore tel que h'^i soit 1-simple au sens de $((\mathfrak{s}')_0^i, (\mathfrak{s}')_1^i)$. Notons que pour $\beta \in \Delta(\mathfrak{h}')^i$ on a $\beta(H_0) = \beta(h'/2) = \beta(h'^i/2)$.

Ainsi il suffit de montrer la proposition pour chaque élément h'^i du préhomogène

$$\left((\mathfrak{s}')_0^i, (\mathfrak{s}')_1^i, h'^i/2\right)$$

c'est à dire en fait pour l'élément $2H_0$, H_0 étant l'élément définissant la graduation d'un préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ tel que $2H_0$ est 1-simple et pour lequel le système de racines Δ est irréductible. On se place désormais dans cette situation.

(2) Soit donc un préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ tel que Δ soit irréductible et $2H_0$ soit 1-simple et notons $(x, 2H_0, y)$ un sl_2-triplet 1-adapté, l'automorphisme élémentaire associé, noté g, vérifie $g(H_0) = -H_0$.

Par le lemme 2.1 appliqué à la sous-algèbre $\mathfrak{c} = \mathbb{F}H_0$, il existe g' appartenant à $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ tel que $g'(H_0) = -H_0$. Notons $w = \epsilon(g')$, alors $\bigcup_{i \geq 1} \Delta_i \subset \Delta(w) = \{\alpha > 0 | w(\alpha) < 0\}$ donc si w_1 désigne l'élément de plus grande longueur de W nous avons $\Delta(w_1 w) \subset \Delta_0$ d'où $w_1 w \in W_0$. Ainsi l'élément H_0 vérifie les relations suivantes:

$$\forall \alpha \in \Delta \qquad w_1(\alpha)(H_0) = -\alpha(H_0). \qquad (**)$$

Notons que ceci ne représente que la traduction du fait bien connu que le parabolique associé au préhomogène est auto-opposé [11].

Lorsque l'élément -1 est dans W, il existe $l = \operatorname{rang}(\Delta)$ racines deux à deux fortement orthogonales que l'on peut donc choisir positives et les noter $\beta_1, \ldots, \beta_l$ [1, Chap. 6, Sect. 1, Ex. No. 15], il suffit alors d'écrire les composantes de H_0 dans la base $\{h_{\beta_i}, 1 \leq i \leq l\}$. Ceci convient pour tout les systèmes de racines iréductibles sauf pour A_l, D_{2l+1}, E_6.

Pour les trois cas restants, on construit une suite de racines deux à deux fortement orthogonales par orthogonalisations successives en partant de la plus grande racine β_1 de Δ, puis des plus grandes racines des composantes irréductibles de $\{\alpha \in \Delta \mid (\alpha, \beta_1) = 0\}$ etc. Ceci se fait par simple lecture des diagrammes de Dynkin complétés.

On considère alors le $\mathbb{F}$-espace vectoriel $V = \oplus_{1 \leq i \leq r} \mathbb{F} h_{\beta_i}$ et on caractérise les éléments de V par des équations lorsqu'on munit $\mathfrak{a}$ de la base duale correspondant aux racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ de Δ. Il suffit alors de vérifier que les équations qui caractérisent le sous-espace V sont données exactement par les relations $(**)$.

Soit $h \in \mathfrak{a}$, on note pour pour $1 \leq i \leq l$, $b_i = \alpha_i(h)$ et on rappelle que w_1 est d'ordre 2.

$\Delta = A_l$

Les notations sont celles de la planche I de [1]. On établit immédiatement la liste suivante:

$$k = 1, \ldots, \left[\frac{l+1}{2}\right], \qquad \beta_k = \sum_{k \leq i \leq l-k+1} \alpha_i.$$

h est dans V si et seulement si $k = 1, \ldots, [(l+1)/2]$, $b_k = b_{l-k+1}$ ce qui termine la démonstration car $w_1(\alpha_k) = -\alpha_{l-k+1}$.

$\Delta = D_{2l+1}$

Les notations sont celles de la planche IV de [1]. On établit immédiatement la liste suivante:

$$k = 1, \ldots, l, \qquad \beta_{2i} = \epsilon_{2i-1} - \epsilon_{2i} = \alpha_{2i-1}$$

$$\beta_{2i-1} = \epsilon_{2i-1} + \epsilon_{2i} = \alpha_{2i-1} + 2 \sum_{2i \leq j \leq 2l-1} \alpha_j + \alpha_{2l} + \alpha_{2l+1}.$$

h est dans V si et seulement si $b_{2l} = b_{2l+1}$ or $w_1(\alpha_k) = -\alpha_k$ pour $k \leq 2l - 1$ et $w_1(\alpha_{2l}) = -\alpha_{2l+1}$.

$\Delta = E_6$

Les notations sont celles de la planche V de [1]. On établit immédiatement la liste suivante:

$$\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6,$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \qquad \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \qquad \beta_4 = \alpha_4.$$

h est dans V si et seulement si $b_1 = b_6$ et $b_3 = b_5$ or $w_1(\alpha_k) = -\alpha_k$ pour $k = 2, 4$ et

$$w_1(\alpha_1) = -\alpha_6, \qquad w_1(\alpha_3) = -\alpha_5. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 2.6. *Soit* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ *un préhomogène tel que* $\mathfrak{g}$ *soit déployée sans composante de type* G_2 *et* $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ *pour* $i \geq 3$, *alors pour tout* h 1-*simple il existe* g *dans* G *et des racines* $\beta_1, \dots, \beta_r$, *deux à deux fortement orthogonales de* $\Delta_1 \cup \Delta_2$ *telles que* $gh = \sum_{1 \leq i \leq r} \beta_i(H_0) h_{\beta_i}$ *et si dans la liste précédente il existe des racines appartenant à* Δ_2, *notée* $\beta_1, \dots, \beta_s$ *alors il existe s racines de* Δ_1, *notées* $\delta_1, \dots, \delta_s$ *telles que*

(i) $\delta_1, \dots, \delta_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_r$ *soient deux à deux fortement orthogonales*

(ii) $\Delta \cap (\oplus_{1 \leq i \leq r} \mathbb{Z}\beta_i \oplus_{1 \leq i \leq s} \mathbb{Z}\delta_i) = \{\pm\beta_i, 1 \leq i \leq r, \pm\delta_j, \pm(\beta_j - \delta_j), 1 \leq j \leq s\}$

(iii) *Pour* $1 \leq j \leq s$ $n(\beta_j, \delta_j) = n(\delta_j, \beta_j) = 1$.

Réciproquement tout élément de la forme $\sum_{1 \leq i \leq r} \beta_i(H_0) h_{\beta_i}$, *avec les racines* $\beta_1, \dots, \beta_r$ *vérifiant les propriétés énoncées ci-dessus est* 1-*simple*.

Démonstration. Tout élément de la forme énoncée dans la proposition est 1-simple par (ii), en effet si on note pour toute racine α, x_α un élément non nul du sous-espace radiciel associé

$$\Bigg(\sum_{s+1 \leq i \leq r} x_{\beta_i} + \sum_{1 \leq i \leq s} (x_{\beta_i - \delta_i} + x_{\delta_i}), \qquad \sum_{1 \leq i \leq r} \beta_i(H_0) h_{\beta_i},$$

$$\sum_{s+1 \leq i \leq r} x_{-\beta_i} + 2 \sum_{1 \leq i \leq s} (x_{-\beta_i + \delta_i} + x_{-\delta_i}) \Bigg)$$

est un sl_2-triplet 1-adapté.

Par le lemme 2.2, on peut supposer que h est dans $\mathfrak{a}$, qui est ici une sous-algèbre de Cartan déployée.

Comme deux éléments 1-simples de $\mathfrak{a}$ sont $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})_{H_0}$ conjugués, et que seule l'action de $\epsilon(\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})_{H_0}) = W_0 = \epsilon(\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}, \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}})_{H_0})$ intervient, $\overline{\mathbb{F}}$ étant une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, tout revient à faire la démonstration dans le cas algébriquement clos.

On reprend la démonstration de la proposition 2.5 avec ses notations mais lorsque $\mathbb{F}$ est algébriquement clos; mais alors le support $\mathfrak{S}'$ donne un préhomogène localement plat i.e. vérifiant $\dim(\mathfrak{S}'_0) = \dim(\mathfrak{S}'_1)$ et ceci reste vrai pour chaque composante irréductible $(\mathfrak{S}')^i$.

Comme chaque graduation $((\mathfrak{s}')^i)_j = \{0\}$ pour $j \geq 3$ et qu'il n'y a pas de composantes irréductibles de type G_2, par les tables se trouvant dans [3] on vérifie que les seules composantes possibles pour $\Delta(\mathfrak{h}')^i$ sont de type A_1 ou A_2, les t.d.s correspondantes étant toutes principales i.e. $(\Delta(\mathfrak{h}')^i)_0 = \emptyset$.

Lorsque $\Delta(\mathfrak{h}')^i$ est de type A_1 on prend pour β_i l'unique racine de $\Delta(\mathfrak{h}')^i$.

Lorsque $\Delta(\mathfrak{h}')^i$ est de type A_2, on prend pour β_i l'unique racine de $(\Delta(\mathfrak{h}')^i)_2$ et pour δ_i une des deux racines de $(\Delta(\mathfrak{h}')^i)_1$. ∎

3. QUELQUES DÉFINITIONS

Une racine λ de Δ_1, de co-racine h_λ, est appelée 1-*minimale* si le sous-espace radiciel associé, noté $\mathfrak{g}^\lambda$, est égal au sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_1$ de poids 2 pour h_λ c'est à dire si et seulement si l'ensemble $\{\mu \in \Delta_1/\mu(h_\lambda) = 2\}$ est réduit à la seule racine λ, ou encore si et seulement si toute racine de Δ_0 orthogonale à λ lui est fortement orthogonale. En particulier les racines longues ou simples de Δ_1 sont 1-minimales.

On donne les définitions suivantes sur les préhomogènes de type parabolique:

$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est dit *faiblement* (resp. *quasi*) *commutatif* si il existe n racines de Δ_1 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, deux à deux (resp. fortement) orthogonales dont la somme des co-racines, notées $h_1, \ldots, h_n$, vaut $2H_0$.

$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est dit *presque commutatif* si il est *faiblement commutatif* et si il existe de plus n sl_2-*triplets* $(x_i, h_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ 1-adaptés commutants deux à deux, dans les notations ci-dessus.

$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est dit *commutatif* si $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour $i \geq 2$.

Le résultat suivant est bien connu lorsque $\mathbb{F}$ est algébriquement clos [5, 8]:

LEMME 3.1. *Soit* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ *un préhomogène commutatif régulier alors il est quasi-commutatif.*

Démonstration. On reprend les notations du paragraphe 2. Comme (g_0, g_1, H_0) est un préhomogène commutatif régulier, $2H_0$ est 1-simple [11] or $\Delta_2 = \emptyset$ d'où le résultat en appliquant la proposition 2.5. ∎

Lorsque h est semi-simple déployé, on note $E_i(h)$ le sous-espace propre de ad(h) de valeur propre i et $\mathfrak{U}(h)$ est la partie semi-simple du centralisateur de h, qui est une sous-algèbre réductive; $\mathfrak{U}(h)$ est également graduée

$$\mathfrak{U}(h)_i = \mathfrak{U}(h) \cap \mathfrak{g}_i \qquad \text{et si } i \neq 0, \mathfrak{U}(h)_i = E_0(h) \cap \mathfrak{g}_i.$$

Plus généralement, dans les notations de l'introduction, soit $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$, le centralisateur de $\mathfrak{c}$ est donné par

$$E_0(\mathfrak{c}) = E_0(\mathfrak{a}) + \bigoplus_{\{\alpha\in\Delta\ \alpha/\mathfrak{c}=0\}} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

$E_0(\mathfrak{a})$ désignant le centralisateur de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ est la partie semi-simple de $E_0(\mathfrak{c})$ qui est une sous-algèbre réductive; $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ est également graduée

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{c})_i = \mathfrak{U}(\mathfrak{c}) \cap \mathfrak{g}_i \qquad \text{et si } i \neq 0, \mathfrak{U}(\mathfrak{c})_i = E_0(\mathfrak{c}) \cap \mathfrak{g}_i.$$

$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ est une sous-algèbre abélienne, déployée, maximale de $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ et le système de racines (resp. le groupe de Weyl) de $(\mathfrak{U}(\mathfrak{c}), \mathfrak{a} \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{c}))$ est donné par

$$\{\lambda \in \Delta \mid \lambda(\mathfrak{c}) = 0\} \qquad (\{w \in W \mid w/\mathfrak{c} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{c}}\}).$$

Lorsque I est un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$, on note $h_I = \sum_{i\in I} h_i$.

Remarque 3.2. Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est faiblement (resp. presque, quasi) commutatif, $(\mathfrak{U}(h_I)_0, \mathfrak{U}(h_I)_1, H_0 - h_I/2)$ et $(\mathfrak{U}(\oplus_{i\in I} \mathbb{F}h_i)_0, \mathfrak{U}(\oplus_{i\in I} \mathbb{F}h_i)_1, H_0 - h_I/2)$ sont faiblements (resp. presque, quasi) commutatifs.

De plus les racines 1-minimales au sens de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ qui s'annulent en h_I (resp. en h_i pour $i \in I$) restent 1-minimales au sens de $(\mathfrak{U}(h_I)_0, \mathfrak{U}(h_I)_1, H_0 - h_I/2)$ (resp. au sens de $(\mathfrak{U}(\oplus_{i\in I} \mathbb{F}h_i)_0, \mathfrak{U}(\oplus_{i\in I} \mathbb{F}h_i)_1, H_0 - h_I/2)$).

Les préhomogènes faiblement commutatifs sont simples à étudier car l'essentiel des démonstrations se fait par récurrence dans des préhomogènes de la forme indiquée dans la remarque 3.2, c'est à dire exactement du même type.

4. DESCRIPTION DES PRÉHOMOGÈNES FAIBLEMENT COMMUTATIFS

Dans les notations de l'introduction (i.e. $\mathfrak{a}, \Delta, \Delta_i, \Delta^+, W, W_0$) on suppose que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n racines de Δ_1 deux à deux orthogonales dont la somme des co-racines, notées $h_1, \dots, h_n$, vaut $2H_0$ et on note $\mathfrak{h} = \oplus_{1\le i\le n} \mathbb{F}h_i$ la sous-algèbre associée.

Pour tout entier j compris entre 1 et n, s_j est la symétrie par rapport à λ_j.

Dans ce paragraphe on donne entre autre la description de $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ et $W_0 \setminus W/W_0$.

PROPOSITION 4.1. *On a* $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ (*i.e.* $\Delta_i = \emptyset$) *pour* $i \geq 3$.

Démonstration. Soit p le plus grand entier pour lequel Δ_p est non vide et soit λ une racine de Δ_p, p est ≥ 1, comme $2H_0 = \sum_{1 \leq i \leq n} h_i$ on a

$$\sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i) = 2p \tag{1}$$

et comme Δ_{p+1} est vide, pour $1 \leq i \leq n$ $\lambda + \lambda_i$ n'est pas une racine d'ou

$$n(\lambda, \lambda_i) \geq 0. \tag{2}$$

Soit $\mu = s_1 s_2 \cdots s_n(\lambda) = \lambda - \sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i).\lambda_i$ par orthogonalité des $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Les relations (1) et (2) impliquent:

$$-n(\mu, \lambda) = \sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i).n(\lambda_i, \lambda) - 2 \geq 2(p-1). \tag{3}$$

Or λ et μ ont même longueur donc $-n(\mu, \lambda) \leq 2$ d'où $p \leq 2$ par (3). ∎

LEMME 4.2 (Structure de Δ_2). *Soit* $\lambda \in \Delta_2$ *on a les cas suivants*:

soit (i) *il existe i tel que* $\lambda = 2\lambda_i$

soit (ii) *il existe* $i \neq j$ *tels que* $\lambda = (\lambda_i + \lambda_j)$

soit (iii) *il existe* $i \neq j$ *tels que* $\lambda = \frac{1}{2}(3\lambda_i + \lambda_j)$

soit (iv) *il existe* $i < j < k < l$ *tels que* $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l)$

soit (v) *il existe* i, j, k *distincts tels que* $\lambda = \lambda_i + \frac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_k)$ *et* λ_i *est une racine courte qui n'est pas* 1-*minimale*.

Démonstration. On utilise les résultats de [1, Chap. VI, Sect. 1, No. 3].

Soit λ dans Δ_2, considérons, comme dans la proposition 4.1, la racine $\mu = s_1 s_2 \cdots s_n(\lambda) = \lambda - \sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i).\lambda_i$; la relation (3) de la démonstration de la proposition 4.1 donne avec $p = 2$ les inégalités:

$$2 \leq \sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i).n(\lambda_i, \lambda) - 2 = n(-\mu, \lambda) \leq 2.$$

Ainsi $n(-\mu, \lambda) = 2$ d'où $\mu = -\lambda$ car μ et λ ont même longueur, et par conséquent:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i).\lambda_i\right) \qquad \textit{avec} \sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i) = 4.$$

On en déduit immédiatement les cas (i) ($n(\lambda, \lambda_i) = 4$), (iii) ($n(\lambda, \lambda_i) = 3n(\lambda, \lambda_j) = 3$) et (iv) (pour tout i $n(\lambda, \lambda_i) \leq 1$).

Remarquons que

dans le cas (iii), λ, λ_i, λ_j sont dans une même composante de type G_2; λ_j (resp. λ_i) est longue (resp. courte) et on a:

$$s_{(\lambda_i-\lambda_j)/2}(\lambda_i) = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j) \qquad et \qquad s_{(\lambda_i-\lambda_j)/2}(\lambda_j) = \frac{1}{2}(3\lambda_i - \lambda_j),$$

dans le cas (iv), $s_\lambda(\lambda_i) = \lambda - \lambda_i$, de même pour j, k, l donc les racines λ, λ_i, λ_j, λ_k, λ_l ont même longueur et on vérifie immédiatement que

$$s_{(-\lambda_i-\lambda_j+\lambda_k+\lambda_l)/2}(\lambda_j) = \frac{1}{2}(-\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l).$$

Il reste le cas pour lequel il existe i tel que $n(\lambda, \lambda_i) = 2$.

Ce cas se subdivise en deux:

Soit il existe j distinct de i tel que $n(\lambda, \lambda_j) = 2$ d'où le cas (ii).

Soit il existe j et k distincts et distincts de i tels que $n(\lambda, \lambda_j) = n(\lambda, \lambda_k) = 1$ mais alors $\lambda = \lambda_i + \frac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_k)$ d'où $\delta = \lambda_i + \frac{1}{2}(\lambda_j - \lambda_k)$ est une racine de Δ_1 vérifiant $n(\delta, \lambda_i) = 2$ ainsi λ_i n'est pas 1-minimale.

Soit $\alpha = \lambda_i - \frac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_k)$, α est une racine de Δ_0 et on vérifie que $s_\alpha(\lambda_j) = \delta$ car $n(\lambda_j, \alpha)$ est un entier négatif et α est une racine longue dans la composante irréductible qui la contient. ∎

Remarques.

(1) Le lemme 4.2 montre que dans le cas où il existe des racines de Δ_1 deux à deux orthogonales dont la somme des co-racines vaut $2H_0$, l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ que l'on note $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})$ et qui est un $\mathfrak{g}_0$-module, contient $\oplus_{i \neq 0} \mathfrak{g}_i$, c'est donc un idéal de $\mathfrak{g}$, il contient également H_0.

$\mathfrak{g}$ étant semi-simple se décompose en somme directe de deux idéaux qui commutent et qui sont orthogonaux pour B:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1}) \oplus \mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})^{\perp} .$$

Dans ce cas $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})^{\perp}$ centralise $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})$. Les préhomogènes $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ et $(\mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})_0, \mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})_1, H_0)$ sont les mêmes donc on peut toujours supposer que $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ *engendrent* $\mathfrak{g}$ *sans restreindre la généralité*.

Δ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, est alors la somme directe de deux systèmes de racines: celui de $(\mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})^{\perp}, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})^{\perp})$ et celui de $(\mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1}), \mathfrak{a} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1}))$

Seul ce dernier système de racines intervient dans le préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ et c'est ce dernier que l'on note Δ par la suite.

(2) Indiquons une notation qui sera utilisée ultérieurement. λ étant une racine de Δ, on appelle *support* de λ l'ensemble $s(\lambda) = \{i | n(\lambda, \lambda_i) \neq 0\}$ et le cardinal de $s(\lambda)$ se note $l(\lambda)$.

On remarquera que deux racines de Δ_2 sont orthogonales si et seulement si elles sont fortement orthogonales, si et seulement si leurs supports sont disjoints.

A tout ensemble A de racines de Δ, on associe le sous-ensemble $s(A) = \bigcup_{\lambda \in A} s(\lambda) = \{i \in \{1, \ldots, n\}, \exists \mu \in A$ tel que $\mu(h_i) \neq 0\}$.

LEMMA 4.3 (Structure de Δ_1). *On suppose que le sous-ensemble de racines de Δ_1 deux à deux orthogonales dont la somme des co-racines vaut $2H_0$ est de longueur maximale (i.e. n est le nombre maximal) (hypothèse H) alors Δ_1 est constitué des racines de l'ensemble*

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, s_\delta(\lambda_1), \ldots, s_\delta(\lambda_n), \delta \in \Delta_0\}$$

et éventuellement des racines courtes de la forme $(\lambda_i + \lambda_j)/2$ $(i \neq j)$ qui ne sont pas 1-minimales.

Démonstration. Soit λ dans Δ_1 donc $\sum_{1 \leq i \leq n} n(\lambda, \lambda_i) = 2$. Nous avons 2 cas possibles:

(a) Il existe i compris entre 1 et n tel que $\lambda + \lambda_i$ soit une racine, alors elle est dans Δ_2; il suffit d'appliquer le lemme 4.2, ainsi que les résultats de conjugaison qui figurent dans la démonstration.

(b) Pour tout i compris entre 1 et n, $\lambda + \lambda_i$ n'est pas une racine donc $n(\lambda, \lambda_i) \geq 0$ alors ou bien

(i) Il existe i tel que $n(\lambda, \lambda_i) = 2$ alors montrons par l'absurde que sous l'hypothèse H, $\lambda = \lambda_i$. Supposons $\lambda \neq \lambda_i$, on a donc pour tout j distinct de i $n(\lambda, \lambda_j) = 0$; λ_i (resp. λ) est courte (resp. longue) et $\alpha = \lambda - \lambda_i$ est une racine de Δ_0 de même longueur que λ_i, alors λ et $\mu = s_\alpha(\lambda) = \lambda_i - \alpha$ sont deux racines de Δ_1 orthogonales et orthogonales aux racines $\{\lambda_j\}_{1 \leq j \neq i \leq n}$, de plus $h_\lambda = \frac{1}{2}(h_i + h_\alpha)$ et $h_\mu = \frac{1}{2}(h_i - h_\alpha)$ d'où $\{\lambda, \mu, \lambda_j, 1 \leq j \neq i \leq n\}$ est un sous-ensemble de $n + 1$ racines de Δ_1 deux à deux orthogonales dont la somme des co-racines vaut $2H_0$, ce qui contredit l'hypothèse H.

(ii) Il existe $i \neq j$ tels que $n(\lambda, \lambda_i) = n(\lambda, \lambda_j) = 1$.

1er cas. $n(\lambda_i, \lambda)$ est supérieur ou égal à 2, alors $\|\lambda_i\| = \sqrt{2}\|\lambda\|$ et en considérant la λ-chaine définie par $(-\lambda_i)$ on a $2\lambda - \lambda_i \in \Delta_1$ et vérifie $n(2\lambda - \lambda_i, \lambda_j) = 2$ d'où par le cas (i), $\lambda = (\lambda_i + \lambda_j)/2$. Le calcul de la longueur de λ donne $\|\lambda_i\| = \|\lambda_j\|$ donc $n(\lambda_i, \lambda) = n(\lambda_j, \lambda) = 2$; $\lambda_i - \lambda$ et $\lambda_j - \lambda$ sont des racines de Δ_0 orthogonales à λ mais non fortement orthogonales, λ est une racine courte qui n'est pas 1-*minimale*.

Le résultat est le même lorsque $n(\lambda_j, \lambda)$ est supérieur ou égal à 2.

2eme cas. $n(\lambda_i, \lambda) = n(\lambda_j, \lambda) = 1$, λ, λ_i et λ_j ont la même longueur et $s_{\lambda - \lambda_i}(\lambda) = \lambda_i$ (resp. $s_{\lambda - \lambda_j}(\lambda) = \lambda_j$). ∎

Remarque. D'après le lemme 4.3, sous l'hypothèse H, toute racine 1-minimale de Δ appartient à l'ensemble

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, s_\delta(\lambda_1), \dots, s_\delta(\lambda), \delta \in \Delta_0\}$$

et $\{\lambda \in \Delta_1 \lambda(h_i) = 2\} = \Delta \cap \{\lambda_i, \lambda_i + \frac{1}{2}(\lambda_j - \lambda_k), \ 1 \le j \ne k \le n$ et $j, k \ne i\}$.

En particulier on constate que dans le cas où $\Delta_2 = \emptyset$, toutes les racines λ_i, $1 \le i \le n$ sont 1-minimales.

Dans tous les cas $\mathfrak{g}^{\lambda_i} = E_2(h_i) \bigcap_{1 \le k \ne i \le n} E_0(h_k)$.

PROPOSITION 4.4 (Unicite). *On suppose que l'hypothèse* H *du lemme* 4.3 *est vérifiée*.

(1) *Soit* $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ *un sous-ensemble de racines de* Δ_1 *deux à deux orthogonales alors il existe g dans* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})_{H_0}$ *et p parties disjointes non vides*, $I_1, \dots, I_p$ *de* $\{1, \dots, n\}$ *ayant au plus deux éléments tels que pour* $i = 1, \dots, p$ $g(h_{\mu_i}) = \sum_{j \in I_i} h_j$.

(2) *Soit* $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ *un sous-ensemble de n racines de* Δ_1 *deux à deux orthogonales alors la somme des co-racines vaut* $2H_0$ *et il existe w appartenant à* W_0 *tel que* $w(\mu_i) = \lambda_i$ *pour i compris entre* 1 *et n*, *ceci à l'indexation près*.

(3) *Soit* $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ *un sous-ensemble de racines de* Δ_1 *deux à deux orthogonales* 1-*minimales alors il existe w appartenant à* W_0 *tel que* $w(\mu_i) = \lambda_i$ *pour i compris entre* 1 *et p*, *ceci à l'indexation près*.

Démonstration.

(1) Démontrons la première assertion par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant trivial. On suppose le résultat vrai pour $n - 1$. Pour n, on considère le sous-ensemble de racines $\mu_1, \dots, \mu_p$ de Δ_1, deux à deux orthogonales.

Par la description de Δ_1 donnée dans le lemme 4.3, deux cas sont possibles:

(i) Il existe i et δ appartenant à Δ_0 tels que $\mu_1 = s_\delta(\lambda_i)$, le résultat résulte alors de l'hypothèse de récurrence appliquée au préhomogène $(\mathfrak{U}(h_i)_0, \mathfrak{U}(h_i)_1, H_0 - h_i/2)$ dont le groupe de Weyl centralise λ_i, avec les racines $\{s_\delta(\mu_i), 2 \le i \le n\}$.

(ii) Pour tout i μ_i est courte et non 1-minimale alors à l'indexation près on a:

$$\mu_1 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{(\lambda_3 + \lambda_4)}{2}, \ldots, \qquad \text{et}$$
$$h_{\mu_1} = h_1 + h_2, \qquad h_{\mu_2} = h_3 + h_4 \ldots$$

d'où le résultat.

Soit μ une racine 1-minimale, on peut supposer que $h_\mu = \sum_{1 \leq i \leq p} h_i$; ainsi pour $i = 1, \ldots, p$ $n(\lambda_i, \mu) = 2$ d'où par 1-minimalité $p = 1$ $\mu = \lambda_1$.

(2) Les assertions (2) et (3) découlent de (1). ∎

Remarques.

(1) Lorsqu'on suppose que Δ est irréducible, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ est maximale (c'est à dire qu'elle vérifie l'hypothèse H du lemme 4.3) et que toutes les racines λ_i, $1 \leq i \leq n$ ont la même longueur, alors pour tout $i = 1, \ldots, n$ λ_i est 1-minimale. En effet, l'une au moins des racines λ_j est 1-minimale or toutes les racines λ_i, $1 \leq i \leq n$ ont la même longueur, donc elles sont dans la même orbite de W_0 d'où elles sont toutes 1-minimales.

(2) Lorsque $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont des racines de Δ_1 deux à deux orthogonales, 1-minimales dont la somme des co-racines vaut $2H_0$ le (2) et le (3) de la proposition 4.4 impliquent que l'hypothèse H du lemme 4.3 est vérifiée par $\{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ c'est à dire que la famille est maximale.

Dorénavant on suppose que la famille $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *considérée est maximale* c'est à dire qu'elle vérifie l'hypothèse H du lemme 4.3.

PROPOSITION 4.5 (Structure de $W_0 \setminus W/W_0$). *Soit w un élément de W qui n'est pas dans W_0 alors il existe un entier $k \geq 1$, des entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ compris entre 1 et n, w_0 et w_1 appartenant à W_0 tels que $w = w_0 s_{i_1} \cdots s_{i_k} w_1$.*

Démonstration. (1) Commençons par réduire le problème. Pour un choix convenable du système de positivité de Δ, les racines simples appartiennent à $\Delta_0 \cup \Delta_1$ or tout élément w du groupe de Weyl est un produit de réflexions par rapport à des racines simple donc on peut supposer que w est un produit de s_α, $\alpha \in \Delta_0 \cup \Delta_1$. Comme s_α, $\alpha \in \Delta_0$ normalise Δ_1, on peut supposer que w est un produit de s_α, $\alpha \in \Delta_1$.

(2) On montre le résultat par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant évident. On suppose le résultat vrai pour $n - 1$ et on le montre dans le cas n.

Montrons que pour tout élément $w = s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_k}$, $\mu_i \in \Delta_1$, il existe un entier j compris entre 1 et n, w_0 et w_1 appartenant à W_0 tels que (à l'indexation près) $w = w_0 s_1 \cdots s_j w_1$ ceci par récurrence sur k.

Cas $k = 1$. Par le lemme 4.3, $\Delta_1 = \Delta_1' \cup$ racines courtes éventuelles qui ne sont pas 1-minimales de la forme $(\lambda_i + \lambda_j)/2$, et $\Delta_1' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, s_\delta(\lambda_1), \dots, s_\delta(\lambda_n),\ \delta \in \Delta_0\}$.

Or par la démonstration du lemme 4.3: $s_{(\lambda_j - \lambda_i)/2}(\lambda_i) = \lambda_j$ donc

$$s_{(\lambda_i + \lambda_j)/2} = s_i s_{(\lambda_j - \lambda_i)/2} s_i = s_i s_j s_{(\lambda_j - \lambda_i)/2}.$$

Supposons le résultat vrai pour $k - 1$ et montrons le pour k. Par application de l'hypothèse de récurrence à $s_{\mu_2} \cdots s_{\mu_k}$ on peut écrire:

$$w = s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_k} = w_0 s_{w_0^{-1}(\mu_1)} s_1 \cdots s_j w_1 = w_0 s_\mu s_1 \cdots s_j w_1$$

avec $\mu = w_0^{-1}(\mu_1) \in \Delta_1, 1 \le j \le n$ et $s_{\mu_2} \cdots s_{\mu_k} = w_0 s_1 \cdots s_j w_1$.

Considérons $w' = s_\mu s_1 \cdots s_j$.

(i) Si $\mu = \lambda_i$ la démonstration est terminée.

(ii) Si μ est orthogonale à l'une des racines λ_i pour un i compris entre 1 et n, le résultat s'obtient en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'élément $w'' = w' s_i = s_\mu s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_j$ (resp. w') dans l'algèbre $\mathfrak{U}(h_i)$ dont le groupe de Weyl associé commute à s_i, lorsque $i \le j$ (resp. $i > j$).

(iii) Supposons que l'on ne soit pas dans l'un des deux cas précédents alors nécessairement pour tout i compris entre 1 et n, $n(\mu, \lambda_i) \ne 0$ et $\mu \ne \lambda_i$.

Cas (a). Remarquons que lorsqu'il existe i tel que $n(\lambda_i, \mu) = 1$ alors $s_\mu(\lambda_i) = \lambda_i - \mu = \alpha \in \Delta_0$ donc

$$w' = s_\mu s_1 \cdots s_j = s_\alpha s_\mu s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_j = s_\alpha w''.$$

Ainsi on peut toujours se ramener à un produit de la forme $w' = s_\mu s_1 \cdots s_j$ avec pour i compris entre 1 et j, $n(\lambda_i, \mu) < 0$ ou $n(\lambda_i, \mu) \ge 2$ et pour i compris entre $j + 1$ et n, $n(\lambda_i, \mu) \ne 0$. (Ceci est la démonstration de [8, Proposition 2.11].)

Cas (b). Il existe i tel que $n(\lambda_i, \mu) < 0$, alors $\mu + \lambda_i$ est une racine de Δ_2, on applique le lemme 4.2 qui fournit les cas suivants en tenant compte des réductions ci-dessus:

(α) $\mu = (3\lambda_2 - \lambda_1)/2$ et $n = 2$.

$\alpha = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$, $\beta = s_1(\mu)$, $\delta = s_2(\alpha) = s_\alpha(\lambda_2)$ sont dans une même composante de type G_2; λ_1 (resp. λ_2) est longue (resp. courte) et $\mu = s_\alpha(\lambda_1)$ d'où

$$w' = s_\mu s_1 = s_\alpha s_1 s_\alpha s_1 = s_\alpha s_{s_1(\alpha)} = s_\alpha s_\delta = s_2 s_\alpha.$$

(β) $\mu = (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)/2$, $n = 4$ et $w' = s_\mu s_1$.

Soit $\beta = \mu + \lambda_1 = s_1(\mu)$, on vérifie immédiatement la relation

$$s_\beta(\beta - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) = \lambda_1 \qquad \text{donc } s_\beta(s_2 s_3 s_4 s_\beta s_2 s_3 s_4) s_\beta = s_1 \quad (4)$$

d'où

$$\begin{aligned} s_2 s_3 s_4 w' &= s_1 s_2 s_3 s_4 s_\beta \\ &= s_1 (s_2 s_3 s_4 s_\beta s_1) s_1 \\ &= s_1 (s_\beta s_2 s_3 s_4 s_\beta) s_1 \qquad \text{par (4)} \\ &= s_{s_1 s_\beta(\lambda_2)} s_{s_1 s_\beta(\lambda_3)} s_{s_1 s_\beta(\lambda_4)} \\ &= s_{\beta - \lambda_1 - \lambda_2} s_{\beta - \lambda_1 - \lambda_3} s_{\beta - \lambda_1 - \lambda_4} \in W_0 . \end{aligned}$$

(γ) $\mu = (-\lambda_1 + \lambda_2)/2 + \lambda_3$, $n = 3$ et $w' = s_\mu s_1$.
Soient

$$\gamma = s_1(\mu) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3}{2}, \qquad \delta = -s_\gamma(\lambda_3) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \in \Delta_1$$

alors

$$s_{(\lambda_1 - \lambda_2)/2}(\lambda_1) = \lambda_2, \qquad s_{\lambda_1} s_{\lambda_2}(\gamma) = \alpha = \frac{-\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3}{2} \in \Delta_0$$

d'où

$$\begin{aligned} s_2 s_3 s_\mu s_1 &= s_1 s_2 s_3 s_\gamma \\ &= s_\alpha s_1 s_2 (s_\gamma s_3 s_\gamma) \\ &= s_\alpha s_1 s_2 s_\delta \\ &= s_\alpha s_1 s_{(\lambda_1 - \lambda_2)/2} s_2 \\ &= s_\alpha s_{(\lambda_1 - \lambda_2)/2} \in W_0 . \end{aligned}$$

Cas (c). Pour tout i $n(\lambda_i, \mu) > 0$ donc $\mu = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, $n = 2$ alors

$$s_\mu s_1 s_2 = s_1 s_2 s_{(\lambda_1 - \lambda_2)/2} s_1 s_2 = s_{(\lambda_1 - \lambda_2)/2} \in W_0$$

d'où le résultat. ∎

COROLLAIRE 4.6.

(1) *Pour tout h 1-simple, il existe g appartenant à G_e et une partie I non vide de $\{1, \dots, n\}$ tels que $gh = \sum_{i \in I} h_i$.*

(2) *Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est presque commutatif, les orbites 1-simples sont en bijection avec $W_0 \setminus W / W_0 - W_0$.*

(3) *Lorsque $\mathfrak{g}$ est déployée, pour tout h 1-simple il existe g appartenant à G et A un sous-ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \{\lambda \in \Delta_2 | l(\lambda) \geq 3\}$ tels que $g(h) = h_{s(A)}$.*

L'ensemble des orbites de G dans les éléments 1*-simples est en bijection avec* $W_0 \setminus W/W_0 - W_0$ *si et seulement si* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est quasi-commutatif.*

Démonstration.

(1) Il suffit d'appliquer le lemme 2.2, la démonstration du théorème 2.3 et la proposition 4.5.

(2) Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est presque commutatif, pour toute partie I non vide de $\{1, \ldots, n\}$ h_I est 1-simple.

(3) Il suffit d'appliquer la proposition 2.6, puisque les composantes de type G_2 correspondent au cas quasi-commutatif (cf. lemme 4.2 (iii)).

Dans les notations de la proposition 2.6, à l'indexation près et à l'aide du (1) de la proposition 4.4, on a

$$1 \leq i \leq s,\ \delta_i = \lambda_i, \qquad \text{et pour } s+1 \leq i \leq r,\ h_{\beta_i} = h_{I_i}.$$

I_i, pour $s+1 \leq i \leq r$, étant des parties disjointes de $\{s+1, \ldots, r\}$, en effet les racines de Δ_2 étant toutes longues dans la composante irréductible qui les contient, il en est de même des racines δ_i, $1 \leq i \leq s$.

Les racines λ_j, $j \in I_i$, $s+1 \leq i \leq r$ sont toutes deux à deux fortement orthogonales soit par la proposition 2.6, soit en raison des longueurs, en effet lorsque I_i a deux éléments $\beta_i = (\lambda_i + \lambda_k)/2$ est la demi-somme de deux racines longues qui sont donc fortement orthogonales aux autres racines λ_p.

Pour $1 \leq i \leq s$, par le lemme 4.2, on peut supposer que

(α) pour $1 \leq i \leq p$ il existe 3 indices distincts i_1, i_2, i_3 tels que $\beta_i = 1/2(\lambda_i + \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \lambda_{i_3})$ et $2h_{\beta_i} = h_{\lambda_i} + h_{\lambda_{i_1}} + h_{\lambda_{i_2}} + h_{\lambda_{i_3}}$

(β) pour $p+1 \leq i \leq s$ il existe 2 indices distincts i_1, i_2 tels $\beta_i = 1/2(\lambda_i + \lambda_{i_1}) + \lambda_{i_2}$ et $2h_{\beta_i} = h_{\lambda_i} + h_{\lambda_{i_1}} + h_{\lambda_{i_2}}$ et les sous-ensembles

$$\{i, i_1, i_2, i_3\} \text{ pour } 1 \leq i \leq p, \qquad \{i, i_1, i_2\} \text{ pour } p+1 \leq i \leq s,$$

$$I_i \text{ pour } s+1 \leq i \leq r$$

sont deux à deux disjoints d'où le résultat.

La dernière assertion est évidente puisque pour tout couple $i \neq j$ compris entre 1 et n l'élément $h_i + h_j$ est 1-simple. ∎

Notation. Pour $I \subset \{1, \ldots, n\}$ non vide on note $w_I = \prod_{i \in I} s_i$.

PROPOSITION 4.7. *Soient $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ et $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$ deux parties non vides de $\{1, \ldots, n\}$ telles que*

(i) $W_0 w_I W_0 = W_0 w_J W_0$.

(ii) *Pour tout i (resp j) de I (resp. de J) λ_i (resp. λ_j) est* 1*-minimale alors $p = q$ et il existe w dans W_0, normalisant l'ensemble $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, tel que pour k variant de* 1 *à p $w(\lambda_{i_k}) = \lambda_{j_k}$ pour un ordre convenable de I et J.*

Démonstration.

(1) Supposons que l'on ait montré qu'il existe w dans W_0 tel que pour k variant de 1 à p $w(\lambda_{i_k}) = \lambda_{j_k}$ pour un ordre convenable de I et J. $\{w(\lambda_i)\ i \notin I\}$ et $\{\lambda_j\ j \notin J\}$ sont des racines de Δ_1 deux à deux orthogonales dont la somme des co-racines vaut $\sum_{j \notin J} h_j$. Par le (2) de la proposition 4.4 et la remarque 3.2 appliquée au préhomogène faiblement commutatif $(\mathfrak{U}(\oplus_{j \in J} \mathbb{F}h_j)_0, \mathfrak{U}(\oplus_{j \in J} \mathbb{F}h_j)_1, \sum_{j \notin J} h_j/2)$, il existe w' dans W_0, centralisant chaque racine λ_j, $j \in J$ et une bijection σ de ${}^{C}I$ sur ${}^{C}J$ tels que $w'w(\lambda_i) = \lambda_{\sigma(i)}$ pour $i \notin I$. L'élément $w'w$ convient.

Il suffit donc de montrer l'existence d'un élément w échangeant λ_i et λ_j pour $i \in I$ et $j \in J$.

(2) Réduisons un peu la situation. On peut prendre $I = \{1, \ldots, p\}$ et écrire une égalité de la forme $w_1 w_J w_2 = w_I$, $w_1, w_2 \in W_0$. Soit $\beta_i = w_2^{-1}(\lambda_{j_i})$, l'égalité précédente devient $u\prod_{1 \leq i \leq q} s_{\beta_i} = w_I$, avec $u \in W_0$ et $\{\beta_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ est encore un ensemble maximal de racines de Δ_1, deux à deux orthogonales et dont la somme des co-racines vaut $2H_0$. On peut également supposer Δ irréductible.

(α) Montrons que I et J ont même cardinal, calculons

$$1 \leq j \leq q, \qquad w_I(\beta_j) = \beta_j - \sum_{1 \leq i \leq p} n(\beta_j, \lambda_i)\lambda_i = -u(\beta_i) \in \Delta_{-1}$$

donc

$$1 \leq j \leq q, \qquad \sum_{1 \leq i \leq p} n(\beta_j, \lambda_i) = 2 \qquad \text{donc} \qquad \sum_{p+1 \leq i \leq n} n(\beta_j, \lambda_i) = 0 \tag{5}$$

de même

$$1 \leq i \leq p, \qquad \sum_{1 \leq j \leq q} n(\lambda_i, \beta_j) = 2 \qquad \sum_{q+1 \leq j \leq n} n(\lambda_i, \beta_j) = 0. \tag{6}$$

Premier cas. $n \geq 3$, ce qui exclut le cas G_2, alors toutes les racines λ_i étant 1-minimales on a les égalités:

$$n(\lambda_i, \beta_j) = n(\beta_j, \lambda_i).$$

En sommant les égalités ci-dessus et (5), on obtient:

$$\sum_{1 \leq j \leq q, 1 \leq i \leq p} n(\lambda_i, \beta_j) = 2p = 2q.$$

Deuxième cas. $n = 2$, montrons le résultat par l'absurde. Supposons que I et J n'ont pas le même cardinal alors on peut supposer que l'on a une égalité de la forme

$$us_{\beta_1} = s_1 s_2 \qquad \text{avec} \qquad \beta_1 \neq \lambda_1 \text{ et } \beta_1 \neq \lambda_2.$$

Les relations (6) donnent alors

$$n(\lambda_1, \beta_1) = n(\lambda_2, \beta_1) = 2, \qquad n(\lambda_1, \beta_2) = n(\lambda_2, \beta_2) = 0$$

d'où $\beta_2(2H_0) = 0$ ce qui est absurde.

(β) La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal commun p de I et J. Examinons les différents cas qui peuvent arriver:

(1) $\beta_p = \lambda_p$ (à l'indexation près), ce qui correspond également au cas où il existe un couple (i, j) tel que $n(\beta_j, \lambda_i) = n(\lambda_i, \beta_j) = 2$ (ce qui arrive toujours lorsque $p = 1$ en raison des relations (5) et (6) alors nécessairement $u(\lambda_p) = \lambda_p$, et on obtient l'égalité $u\prod_{1 \leq j \leq p-1} s_{\beta_i} = \prod_{1 \leq j \leq p-1} s_j$ dans $\mathfrak{U}(h_p)$, il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence si $p \geq 2$.

(2) $p = n$. Il n'y a rien à démontrer.

(3) On n'est pas dans les cas (1) ou (2). Alors soit

(α) Il existe i compris entre $p+1$ et n et j compris entre 1 et p tels que $n(\beta_j, \lambda_i) \neq 0$ alors à l'indexation près et en appliquant les relations (5), on peut supposer que

$$-n(\beta_1, \lambda_n) = n(\beta_1, \lambda_{n-1}) = 1$$

d'où, à l'indexation près, $\beta_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{n-1} - \lambda_n)/2$ et $2 \leq p \leq n-2$ (on rappelle que toutes les racines λ_i, $1 \leq i \leq p$ sont 1-minimales ce qui exclut le cas $\beta_1 = \lambda_1 + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)/2$). On a:

$$u \prod_{2 \leq j \leq p} s_{\beta_i} = s_1 s_2 s_{\beta_1} \prod_{3 \leq j \leq p} s_j.$$

Or

$$\begin{aligned} s_1 s_2 s_{\beta_1} &= s_2 (s_1 s_{\beta_1}) \\ &= s_2 s_{s_1(\beta_1)} s_1 \\ &= s_{s_1(\beta_1)} (s_{s_1(\beta_1)} s_2 s_{s_1(\beta_1)}) s_1 \\ &= s_{s_1(\beta_1)} s_{\delta'} s_1 \\ &= s_\delta s_{s_{\delta'}(\lambda_1)} s_{\delta'} \end{aligned}$$

avec $\delta = s_1(\beta_1) = (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{n-1} - \lambda_n)/2 \in \Delta_0$, $\delta' = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{n-1} + \lambda_n)/2 \in \Delta_1$ et est orthogonale à β_1, $s_{\delta'}(\lambda_1) = \lambda_1 - \delta' \in \Delta_0$; ainsi si on pose $u' = s_{s_{\delta'}(\lambda_1)} s_\delta u \in W_0$ on a l'égalité: $u' \prod_{2 \leq j \leq p} s_{\beta_i} = s_{\delta'} \prod_{3 \leq j \leq p} s_j$, d'où $u'(\beta_1) = \beta_1$ et on applique l'hypothèse de récurrence dans $\mathfrak{U}(h_{\beta_1})$ ainsi il existe w dans W_0 tel que

$$w(\beta_1) = \beta_1, \qquad w(\beta_2) = \delta', \qquad \text{et pour } 3 \leq i \leq p, \qquad w(\beta_i) = \lambda_i.$$

Or

$$s_\delta(\beta_1) = \beta_1 - \delta = \lambda_1, \qquad s_\delta(\delta') = \delta' + \delta = \lambda_2,$$
$$\text{et pour } 3 \leq i \leq p, \qquad s_\delta(\lambda_i) = \lambda_i$$

ainsi $s_\delta w$ convient.

(β) On n'est pas dans les cas précédents donc pour i compris entre $p+1$ et n et j compris entre 1 et p les racines β_j et λ_i sont orthogonales. Ainsi dans l'algèbre $\mathfrak{U}(\oplus_{p+1 \leq i \leq n} \mathbb{F} h_i)$, (définition dans la Section 3) $\{\beta_i,\ 1 \leq i \leq p\}$ et $\{\lambda_i,\ 1 \leq i \leq p\}$ sont deux ensembles de p-racines 1-minimales, deux à deux orthogonales donc la somme des co-racines vaut $\sum_{1 \leq i \leq p} h_i$ et il existe un élément w du groupe de Weyl de $\mathfrak{U}(\oplus_{p+1 \leq i \leq n} \mathbb{F} h_i)_0$ tel que $w\{\beta_i, 1 \leq i \leq p\} = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq p\}$ par le (3) de la proposition 4.4. ∎

Remarque. Le résultat précédent peut être faux si toutes les racines ne sont pas 1-minimales:

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\!\Rightarrow\!\bullet \qquad \alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2 \qquad \alpha_3 = \epsilon_3$$

ceci dans le notations de la planche II de [1], on a:

$$\lambda_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \qquad \lambda_2 = \epsilon_2 + \epsilon_3, \qquad \lambda_3 = \epsilon_1, \qquad \text{et} \qquad s_{\alpha_1} s_3 s_{\alpha_1} = s_{\alpha_3} s_1 s_2.$$

5. LE CAS PARTICULIER DES PRÉHOMOGÈNES FAIBLEMENT COMMUTATIFS POUR LESQUELS λ_i EST 1-MINIMALE POUR TOUT i

5.1. *Généralités*

PROPOSITION 5.1.1. *Supposons Δ irréductible*

(1) $\mathfrak{g}_1$ *est un* $\mathfrak{g}_0$ *module simple*.

(2) *Si Δ n'est pas de type G_2, alors il y a équivalence entre*

(i) *Quels que soient i et j, il existe un élément w_0 de W_0 qui permute entre elles les racines λ_r et qui transforme λ_i en λ_j.*

(ii) *Toutes les racines λ_i sont* 1-*minimales*.

Démonstration.

(1) Considérons la relation binaire définie sur $\{1, \ldots, n\}$ par

$$iRj \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Delta_1 \cup \Delta_2, \qquad n(\lambda, \lambda_i) n(\lambda, \lambda_j) \neq 0.$$

(a) Soit Σ une base de Δ telle que $\Sigma \subset \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$, on note $\Sigma_i = \Sigma \cap \Delta_i$; comme $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ engendrent $\mathfrak{g}$, $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$. Montrons que $1\,R\,2$ implique que $\lambda_1 - \lambda_2$ est combinaison linéaire d' éléments de Σ_0. Lorsque $\Delta = G_2$, Σ_1 a une seule racine donc il n'y a rien à montrer; supposons donc que $\Delta \neq G_2$. Quitte à remplacer λ par $(\prod_{\{k,\, \lambda(h_k) < 0\}} s_k)(\lambda)$

$$\begin{aligned} &\text{on peut supposer que } n(\lambda, \lambda_1) n(\lambda, \lambda_2) > 0 \\ &\text{et que } n(\lambda, \lambda_j) \geq 0 \text{ pour } j = 3, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7}$$

Lorsque $\lambda \in \Delta_1$ nécessairement $n(\lambda, \lambda_1) = n(\lambda, \lambda_2) = 1$ en raison de (7).

1*èr cas.* $n(\lambda_1, \lambda) = n(\lambda_2, \lambda) = 1$ alors $w = s_{\lambda - \lambda_1} s_{\lambda - \lambda_2}$ échange λ_1 et λ_2 et fixe λ_j pour $j = 3, \ldots, n$.

2*ème cas.* $n(\lambda_1, \lambda) \geq 2$ alors par la démonstration du lemme 4.3

$$\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2, \qquad \|\lambda_1\| = \|\lambda_2\|, \qquad n(\lambda_1, \lambda) = n(\lambda_2, \lambda) = 2$$

et l'élément $w = s_{(\lambda_1 - \lambda_2)/2}$ échange λ_1 et λ_2 et fixe λ_j pour $j = 3, \ldots, n$.

Lorsque λ est dans Δ_2:

(i) $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ alors $w = s_{(\lambda_1 - \lambda_2)}$ échange λ_1 et λ_2 et fixe λ_j pour $j = 3, \ldots, n$.

(ii) $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$ mais alors par la démonstration du lemme 4.2 l'élément de W_0 $w = s_{(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)/2} s_{(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)/2}$ échange λ_1 et λ_2, d'une part et λ_3 et λ_4 d'autre part.

(iii) $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3$ alors $\alpha = \lambda_3 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\beta = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$ sont des racines de Δ_0 donc $\lambda_3 - \lambda_1$ est une combinaison linéaire d'éléments de Σ_0 et s_β échange λ_1 et λ_2 et fixe λ_j pour $j = 3, \ldots, n$.

On a également montré que lorsque λ_1 et λ_2 sont 1-minimales, $1\,R\,2$ implique l'existence d'un élément w de W_0 qui permute entre elles les racines λ_k et qui échange λ_1 et λ_2.

(b) Montrons que R est une relation d'équivalence; il suffit de montrer la transitivité, ce qui exclut le cas où Δ est de rang inférieur ou égal à deux.

Supposons donc que l'on ait $1\,R\,2$ et $2\,R\,3$, d'après (7) de (a) il suffit de faire la démonstration lorsque

$$n(\lambda, \lambda_1) n(\lambda, \lambda_2) > 0, \qquad n(\lambda, \lambda_3) = 0, \qquad n(\lambda, \lambda_j) \geq 0,\ j = 4, \ldots, n$$

$$n(\mu, \lambda_2) n(\mu, \lambda_3) > 0, \qquad n(\mu, \lambda_1) = 0, \qquad n(\mu, \lambda_j) \geq 0,\ j = 4, \ldots, n.$$

Lorsque $\lambda \in \Delta_1$ (resp. $\mu \in \Delta_1$), on a vu dans (a) qu'il existe un élément w de W_0 tel que $w(\lambda_1) = \lambda_2$ et qui fixe λ_3 alors $\delta = w^{-1}(\mu)$ vérifie $n(\delta, \lambda_1) n(\delta, \lambda_3) > 0$.

Lorsque λ et μ sont dans Δ_2, alors $\{1,2\}$ (resp. $\{2,3\}$) est dans le support de λ (resp. μ), donc $\delta = \lambda - \mu$ est une racine de Δ_0 de la forme $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i \lambda_i$ ayant $\{1,3\}$ dans son support d'où $n(\delta, \lambda_1) n(\delta, \lambda_3) \neq 0$.

(2) Terminons la démonstration. Soit C une classe d'equivalence et S' l'ensemble des racines $\gamma \in \Delta$ pour lesquelles il existe i appartenant à C tel que $\gamma(h_i) \neq 0$, alors en raison de la transitivité si $\gamma(h_j) \neq 0$, j est également dans C. Soit T le sous-espace engendré par S' et $S = T \cap \Delta$. Il suffit de prouver que T est invariant par W; en effet comme ce dernier opère irréductiblement cela implique que $S = \Delta$ et par suite $C = \{1, \ldots, n\}$. Or pour que T soit W-invariant il suffit que, pour tout $\beta \in S'$ et tout $\alpha \in \Delta$ on ait $s_\alpha(\beta) \in S$. On a

$$s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha.$$

Si $n(\beta, \alpha) = 0$, on a $s_\alpha(\beta) = \beta \in S' \subset S$.

Supposons $n(\beta, \alpha) \neq 0$; si pour un $i \in C$, on a $\alpha(h_i) \neq 0$ alors $\alpha \in S'$ et donc $s_\alpha(\beta)$ est combinaison linéaire d'éléments de S' donc appartient à S. Si pour tout $i \in C$, on a $\alpha(h_i) = 0$ alors il existe $i \in C$ tel que $s_\alpha(\beta)(h_i) = \beta(h_i) \neq 0$ et donc $s_\alpha(\beta) \in S'$. ∎

On considère le sous-groupe de W_0 défini par $\{w \in W \mid w(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}\}$, **P** désigne le sous-groupe du groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ ainsi défini, $\mathfrak{O}$ représente l'ensemble des orbites de **P** dans l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$. On rappelle qu'à toute partie I non vide de $\{1, \ldots, n\}$ on associe les éléments h_I et w_I; on pose $w_\emptyset = \mathrm{id}$ et π désigne l'application de l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ dans $W_0 \setminus W/W_0$ définie par $\pi(I) = W_0 w_I W_0$, alors π définit par passage au quotient une *surjection*, $\overline{\pi}$, de $\mathfrak{O}$ sur $W_0 \setminus W/W_0$.

La proposition 4.7 se traduit alors par:

LEMME 5.1.2. *On suppose que pour tout i compris entre* 1 *et n, λ_i est* 1-*minimale alors h_I et h_J sont dans la même orbite de G ou G_e si et seulement si I et J sont dans la même orbite de* **P** *et $\overline{\pi}$ est une bijection de $\mathfrak{O}$ sur $W_0 \setminus W/W_0$.*

Indiquons les générateurs de **P**. Soit R les restrictions non nulles de Δ à $\mathfrak{b} = \oplus \mathbb{F} h_i$ et $\theta = s_1 s_2 \cdots s_n$, alors le résultat suivant est classique [4]:

R est un système de racines dont le groupe de Weyl, W^R, est la restriction à $\mathfrak{b}$ de $W_\theta = \{w \in W \mid w\theta = \theta w\}$, il est irréductible lorsque Δ l'est; on a $\Delta_2 = R_2$ (lemme 4.2).

Soit λ une racine de R_0:

(1) si $\lambda = (\lambda_i - \lambda_j)/2$ (resp. $\lambda = \lambda_i - \lambda_j$) n'est pas dans une composante de type G_2, s_λ échange λ_i et λ_j et stabilise les λ_k, $k \neq i, j$

(2) si $\lambda_{i,k}^{j,l} = (\lambda_i - \lambda_j + \lambda_k - \lambda_l)/2$, $s_{\lambda_{j,k}^{i,l}} \cdot s_{\lambda_{i,k}^{j,l}}$ permute exactement d'une part λ_i et λ_j, d'autre part λ_k et λ_l; toute permutation paire de

$\{i, j, k, l\}$ se réalise dans $\{w \in W^R \mid w\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}\}$. Soit $\mathbf{Q}$ le sous-groupe du groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$ engendré par le éléments cités ci-dessus dans (1) et (2), que l'on confond également avec le sous-groupe de W^R.

PROPOSITION 5.1.3. $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$.

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur le rang de R. Lorsque ce dernier est inférieur ou égal à 2 le résultat est évident. Supposons la proposition vraie lorsque le rang de R est inférieur ou égal à $n-1 \geq 2$. Lorsque le rang de R est égal à $n \geq 3$, on peut supposer R irréductible (sinon on applique l'hypothèse de récurrence à chaque composante).

Soit $w \in W^R$, alors $w(\lambda_1) = \lambda_i$. Comme R est irréductible, i et 1 sont dans la méme classe d'équivalence or λ_i et λ_1 ont la même longueur donc d'après la démonstration de la proposition 5.1.1 il existe w' dans $\mathbf{Q}$ tel que $w'(w(\lambda_1)) = \lambda_1$ d'où $w'w$ est dans W_{h_1}. On applique alors l'hypothèse de récurrence au préhomogène $(\mathfrak{U}(h_1)_0, \mathfrak{U}(h_1)_1)$ (définition et propriétés: remarque 3.2) d'où $w'w$ est dans $\mathbf{Q}(\mathfrak{U}(h_1))$, or ce dernier groupe est par construction inclus dans $\mathbf{Q}$ donc w est dans $\mathbf{Q}$. ∎

5.2. *Orbites* 1-*simples de préhomogènes faiblement commutatifs pour lesquels* λ_i *est* 1-*minimale pour tout i*

On commence par réduire un peu la situation; pour ceci on établit le résultat géneral suivant:

On rappelle que $E_i(h) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = ix\}$.

LEMME 5.2.1. *Soit* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *un préhomogène et* λ *une racine* 1-*longue*, h *sa coracine alors toute orbite de* G_e *dans* $\mathfrak{g}_1$ *rencontre* $E_{-1}(h) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}^\lambda \oplus \mathfrak{U}(h)_1$.

Démonstration. Soit x dans $\mathfrak{g}_1$, on le décompose suivant ad h en tenant compte du fait que le spectre de ad(h) restreint à $\mathfrak{g}_1$ appartient à l'ensemble $\{-1, 0, 1, 2\}$ [1]:

$$x = \xi_{-1} + \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \qquad \text{avec} \qquad \xi_i \in E_i(h) \cap \mathfrak{g}_1.$$

On note également que $E_2(h) \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^\lambda$ car λ est 1-longue. On suppose ξ_1 non nul, sinon le résultat est démontré.

Supposons d'abord ξ_2 non nul; on complète (ξ_2, h, y) en 1 sl_2-*triplet* 1-adapté. L'endomorphisme ad ξ_2 est bijectif de $E_{-1}(h) \cap \mathfrak{g}_0$ sur $E_1(h) \cap \mathfrak{g}_1$; soit z l'unique élément de $E_{-1}(h) \cap \mathfrak{g}_0$ tel que $[z, \xi_2] = \xi_1$. Soit

$$\xi_0' = \xi_0 - \frac{1}{2}(\text{ad } z)^2 \xi_2$$

$$\xi_{-1}' = \xi_{-1} - \text{ad } z(\xi_0) + \frac{1}{3}(\text{ad } z)^3(\xi_2)$$

un calcul élémentaire donne:

$$x = e^{\mathrm{ad}(z)}(\xi'_{-1} + \xi'_0 + \xi_2).$$

Si $\xi_2 = 0$, comme ξ_1 est non nul, on peut se ramener au cas précédent. En effet, soit η dans $E_{-1}(h) \cap \mathfrak{g}_{-1}$ tel que $B(\eta, \xi_1)$ soit non nul; comme il existe z dans $E_1(h) \cap \mathfrak{g}_0$ vérifiant $\eta = [y, z]$ (tout élément y non nul de $E_{-2}(h) \cap \mathfrak{g}_{-1}$ se complète en un sl_2-triplet d'élément simple h donc $\mathrm{ad}(y)$ est une bijection de $E_1(h) \cap \mathfrak{g}_0$ sur $E_{-1}(h) \cap \mathfrak{g}_{-1}$) on a $B(\eta, \xi_1) = B([z, \xi_1], y) \neq 0$ donc $\mathrm{ad}(z)(\xi_1) \neq 0$. Si t est dans $\mathbb{F}^*$

$$\begin{aligned} e^{t\,\mathrm{ad}(z)}(x) &= e^{t\,\mathrm{ad}(z)}(\xi_{-1} + \xi_0 + \xi_1) \\ &= \xi_{-1} + \xi_0 + \xi_1 + t\,\mathrm{ad}(z)(\xi_{-1} + \xi_0 + \xi_1) \\ &\quad + \frac{t^2}{2}\left(\mathrm{ad}(z)^2\right)(\xi_{-1} + \xi_0) + \frac{t^3}{6}\left(\mathrm{ad}(z)^3\right)(\xi_{-1}) \end{aligned}$$

comme $\mathrm{ad}(z)(\xi_1) \neq 0$, on peut choisir t tel que

$$t\,\mathrm{ad}(z)(\xi_1) + \frac{t^2}{2}\left(\mathrm{ad}(z)^2\right)(\xi_0) + \frac{t^3}{6}\left(\mathrm{ad}(z)^3\right)(\xi_{-1}) \neq 0$$

ce qui nous ramène au cas précédent. ∎

Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est un préhomogène faiblement commutatif admettant $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ comme famille maximale de racines de Δ_1 deux à deux orthogonales, le lemme 5.2.1 permet de montrer:

PROPOSITION 5.2.2. *On suppose que* $\|\lambda_n\| \geq \|\lambda_{n-1}\| \geq \cdots \geq \|\lambda_1\|$ *alors toute orbite de* G_e *dans* $\mathfrak{g}_1$ *rencontre* $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i} \bigoplus_{\mu \in \Delta_1^-} \mathfrak{g}^{\mu}$, *avec* $\Delta_1^{-1} = \{\lambda \in \Delta_1 \mid$ *il existe* i *vérifiant* $n(\lambda, \lambda_i) = -1, n(\lambda, \lambda_j) = 0$ *pour* $i + 1 \leq j \leq n\}$.

Démonstration. On procède par récurrence sur l'entier n. Le résultat est trivial pour $n = 1$. On suppose la propriété démontrée pour $n - 1$. Pour n: Comme la racine λ_n est 1-longue, d'après le lemme 5.2.1 toute orbite de G_e dans $\mathfrak{g}_1$ rencontre

$$E_{-1}(h_n) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}^{\lambda_n} \oplus \mathfrak{U}(h_n)_1.$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au préhomogène faiblement commutatif $(\mathfrak{U}(h_n)_0, \mathfrak{U}(h_n)_1)$ (remarque 3.2); comme $G_e([\mathfrak{U}_0(h_n), \mathfrak{U}_0(h_n)])$ centralise h_n, $E_{-1}(h_n) \cap \mathfrak{g}_1$, qui est inclus dans $\bigoplus_{\mu \in \Delta_1^-} \mathfrak{g}^{\mu}$, est normalisé par $G_e([\mathfrak{U}_0(h_n), \mathfrak{U}_0(h_n)])$. ∎

Ainsi on a également montré

Remarque. Soit $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ un préhomogène commutatif régulier alors il existe n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 1-minimales, deux à deux fortement orthogonales dont la somme des co-racines vaut $2H_0$ et toute orbite de G_e dans $\mathfrak{g}_1$ rencontre $\oplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$.

On introduit le système de racines suivant:

$$\tilde{\Delta} = \Big\{ \pm\lambda_i, \pm \lambda_i \pm \lambda_j, (\pm\lambda_i \pm \lambda_j \pm \lambda_k \pm \lambda_m)/2, \\ 1 \leq i < j < k < m \leq n \Big\} \cap \Delta \subset R.$$

$\tilde{\Delta}$ est une partie close et symétrique de Δ contenant $\Delta_{\pm 2}$ lorsque toutes les racines λ_i, $1 \leq i \leq n$ sont 1-minimales et dans ce cas toutes les racines de $\tilde{\Delta}_1$ sont 1-*minimales*. On considère

$$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{\{\mu \in \tilde{\Delta}\}} \mathfrak{g}^{\mu} \oplus E_0(\mathfrak{a})$$

comme $\tilde{\Delta}$ est une partie close et symétrique, $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, or la restriction de B à $\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'$ est non dégénérée donc cette algèbre est réductive. Soit $\mathfrak{c}$ son centre, $\tilde{\mathfrak{g}}'$ sa partie semi-simple et $\mathfrak{b} = \oplus_{1 \leq i \leq n} \mathbb{F} h_i$; $\mathfrak{b}^{\perp}$ est inclus dans $\mathfrak{c}$ donc $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre abélienne, déployée maximale, formée d'éléments semi-simples de $\tilde{\mathfrak{g}}'$, et le système de racines correspondant est $\tilde{\Delta}$.

$(\tilde{\mathfrak{g}}'_0, \tilde{\mathfrak{g}}'_1, H_0)$ est un préhomogène de même nature que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$: faiblement, ou presque, ou quasi commutatif. Ainsi suivant la remarque (1) qui suit le lemme 4.2 et pour éviter des notations ultérieures, on définit directement

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{g}}'_{\pm 1})$$

et on considère le préhomogène $(\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_1, H_0)$. Le lemme qui suit est évident:

LEMME ET DEFINITION 5.2.3. $(\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_1, H_0)$ *est un préhomogène de même nature que* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$: *faiblement, ou presque, ou quasi commutatif.*

$\mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre abélienne, déployée maximale, formée d'éléments semi-simples de* $\tilde{\mathfrak{g}}_0$, *et* $\tilde{\Delta}$ *est le système de racines de* $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{b})$.

$\tilde{\mathfrak{g}}$ *est déployée si et seulement si les sous-espaces radiciels* $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$ *sont tous de dimension un. Dans ce cas, on dit que le préhomogène* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est presque déployé.*

Remarque. Lorsqu'on suppose que Δ est irréductible, que pour tout i les sous-espaces radiciels $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$ sont tous de dimension un et que les racines $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ne sont pas toutes 1-minimales, les racines $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ont alors deux longueurs différentes donc pour toute racine de Δ le sous-espace radiciel associé est de dimension *un* ainsi $\mathfrak{g}$ est une algèbre simple déployée. Ce résultat peut être en défaut lorsque les racines $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont toutes 1-minimales.

Le préhomogène $(\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_1, H_0)$ sert essentiellement à réduire la caractérisation des orbites.

PROPOSITION 5.2.4. *On suppose que toutes les racines λ_i sont 1-minimales alors*

(1) *Toute orbite de G_e dans $\mathfrak{g}_1$ rencontre $\tilde{\mathfrak{g}}_1$.*

(2) *Toute orbite de G_e dans les éléments 1-simples rencontre le sous-ensemble $\mathfrak{b} \cap \{$les éléments 1-simples de $\tilde{\mathfrak{g}}\}$.*

Démonstration.

(1) Résulte de la proposition 5.2.2 et de l'inclusion de Δ_1^- dans $\tilde{\Delta}$.

(2) Se déduit de (1) et du lemme 2.2. ∎

Avec les notations introduites dans le (2) de la remarque qui suit le lemme 4.2, on a:

PROPOSITION 5.2.5. *On suppose que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est faiblement commutatif presque déployé et que que toutes les racines λ_i sont 1-minimales, les représentants des orbites 1-simples, à l'action de $\{w \in W \mid w(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}\}$ près, sont donnés par les éléments $h_{s(A)}$, A décrivant les sous-ensembles de racines deux à deux fortement orthogonales de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \cup \{\lambda \in \Delta_2 \mid l(\lambda) = 4\}$.*

L'ensemble des orbites de G dans les éléments 1-simples est en bijection avec $W_0 \setminus W/W_0 - W_0$ si et seulement si $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi commutatif.

Démonstration. Par la proposition 5.2.4, il suffit de montrer la proposition pour le préhomogène faiblement commutatif $(\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_1, H_0)$, et par hypothèse l'algèbre semi-simple $\tilde{\mathfrak{g}}$ est déployée, il suffit alors d'appliquer le (3) du corollaire 4.6 en remarquant que dans ce cas il n'existe pas de racines λ de Δ_2 telles que $l(\lambda) = 3$. ∎

6. CLASSIFICATION

Avant de donner la liste des préhomogènes concernés par les résultats précédents, indiquons un résultat.

LEMME 6.1. *On suppose que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est faiblement commutatif et que x est un élément non nul de $\oplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ alors il existe une partie J de $\{1, \ldots, n\}$, des sl_2-triplets $(x_j, h_j, y_j)_{j \in J}$, qui commutent deux à deux et g qui est un produit d'éléments de la forme* $\exp(\operatorname{ad}(A))$ *avec A appartenant à $\mathfrak{g}^{\lambda_i - \lambda_j}$, $\lambda_i - \lambda_j \in \Delta_0$, tels que $g(x) = \sum_{j \in J} x_j$.*

Démonstration. C'est une récurrence sur n. Le résultat pour $n = 1$ étant évident, on suppose le lemme vrai pour $n - 1$.

Soit x non nul appartenant à $\bigoplus_{1 \le i \le n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$. On le décompose:

$$x = \sum_{1 \le i \le n} x_i$$

par récurrence il existe un élément g de la forme indiquée dans l'énoncé, une partie J de $\{1, \dots, n-1\}$ et des sl_2-triplets $(x_i', h_i, y_j')_{j \in J}$, qui commutent deux à deux, tels que:

$$g\Bigl(\sum_{1 \le i \le n-1} x_i\Bigr) = \sum_{j \in J} x_i'.$$

Comme h_n commute à ces sl_2-triplets, il suffit de modifier, $x_n' = g(x_n)$ pour avoir les relations de commutation demandées. On suppose x_n' non nul, alors comme pour $j \in J$ x_j' appartient encore à $\mathfrak{g}^{\lambda_j}$, il se complète en un sl_2-triplet 1-adapté d'élément simple h_j donc pour j dans J:

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} x_j')^2 \colon \mathfrak{g}_0 \cap E_2(h_n) \cap E_{-2}(h_j) &= \mathfrak{g}^{\lambda_n - \lambda_j} \\ &\to \mathfrak{g}_2 \cap E_2(h_n) \cap E_2(h_j) = \mathfrak{g}^{\lambda_n + \lambda_j}\end{aligned}$$

est bijectif. Soit z_j dans $\mathfrak{g}_0 \cap E_2(h_n) \cap E_{-2}(h_j)$ tel que $(\operatorname{ad} x_j')^2(z_j) = -[x_n', x_j']$ et $z = \sum_{j \in J} z_j$ alors pour tout j, z_j commute avec $\bigoplus_{\{1 \le i \le n, k \ne j\}} \mathfrak{g}^{\lambda_k}$ (proposition 4.1)

$$\exp(\operatorname{ad}(z)(x')) = \sum_{j \in J} x_j' + x_n''$$

avec

$$x_n'' = x_n' + \sum_{j \in J} [z_j, x_j'].$$

Si x_n'' est nul, la démonstration est finie. Sinon x_n'' est un élément non nul de $\mathfrak{g}^{\lambda_n}$. Comme les $\{x_j'\}_{j \in J}$ commutent deux à deux, et par le choix des $\{z_j\}_{j \in J'}$ on vérifie que $[x_n'', x_j'] = 0$ pour j dans J, il suffit donc de prendre $J' = J \cup \{n\}$ et de compléter (x_n'', h_n) en un sl_2-triplet 1-adapté. ∎

On rappelle que $\overline{\mathbb{F}}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}$ et que $\overline{\mathfrak{g}_i} = \mathfrak{g}_i \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$.

PROPOSITION 6.2. *Lorsque* $(\overline{\mathfrak{g}_0}, \overline{\mathfrak{g}_1})$ *est faiblement* (*resp. quasi*) *commutatif*, $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est également faiblement* (*resp. presque*) *commutatif.*

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le rang de $\mathfrak{g}$. On suppose donc la proposition démontrée lorsque le rang de $\mathfrak{g}$ est inférieur ou égal à p et on suppose que le rang de $\mathfrak{g}$ est $p + 1$ (avec $p \ge 0$).

Soit $\overline{\mathfrak{h}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\overline{\mathfrak{g}}$ contenant H_0, $\overline{\Delta}$ le système de racines de $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{h}})$ muni d'un ordre pour lequel $\{\alpha \in \overline{\Delta} \mid \alpha(H_0) > 0\}$ est inclus dans $\overline{\Delta}^+$. On note $\overline{\Delta}_i = \{\alpha \in \overline{\Delta} \mid \alpha(H_0) = i\}$, $\overline{W}_0$ le groupe de Weyl associé à $\overline{\Delta}_0$.

Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ un ensemble de racines de $\overline{\Delta}_1$, deux à deux (resp. fortement) orthogonales tels que la somme des co-racines, notées $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_m$, vaut $2H_0$, cet ensemble ayant un nombre maximal d'éléments.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous algèbre abélienne, déployée, maximale contenue dans $\overline{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{g}$, Δ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ muni du même ordre, $\Delta_1 = \{\lambda \in \Delta \mid \lambda(H_0) = 1\}$.

Soit λ_1 une racine de Δ_1 et h_{λ_1} sa co-racine alors h_{λ_1} est 1-simple au sens de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ donc également au sens de $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$. D'après le (1) du corollaire 4.6, il existe $w \in \overline{W}_0$ et une partie I de $\{1, \dots, m\}$ tels que $h_{\lambda_1} = w(\overline{h}_I)$.

Si $p = 0$ alors $h_{\lambda_1} = 2H_0$, la démonstration est terminée. Sinon considèrons le préhomogène $(\mathfrak{U}_{\mathfrak{g}}(h_{\lambda_1})_0, \mathfrak{U}_{\mathfrak{g}}(h_{\lambda_1})_1)$. On a $\overline{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{g}}(h_{\lambda_1}) = \mathfrak{U}_{\overline{\mathfrak{g}}}(w(\overline{h}_I))$, comme

$$\left(\mathfrak{U}_{\overline{\mathfrak{g}}}\left(w\left(\overline{h}_I\right)\right)_0, \mathfrak{U}_{\overline{\mathfrak{g}}}\left(w\left(\overline{h}_I\right)\right)_1\right)$$

est encore un préhomogène faiblement commutatif (remarque 3.2) on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence ainsi il existe $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ racines de $\Delta_1^{\lambda_1} = \{\lambda \in \Delta_1 \mid n(\lambda, \lambda_1) = 0\}$ dont la somme des co-racines vaut $2H_0 - h_{\lambda_1}$ d'où la première assertion.

Dorénavant on suppose que l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ a un nombre maximal d'éléments et que $(\overline{\mathfrak{g}_0}, \overline{\mathfrak{g}_1})$ est quasi commutatif. D'après le lemma 6.1 il suffit de montrer que l'espace vectoriel

$$V = \bigoplus_{1 \le j \le n} E_2(h_j) \bigcap_{1 \le i \ne j \le n} E_0(h_k) = \bigoplus_{1 \le j \le n} \mathfrak{g}^{\lambda_j}$$

contient un élément admettant $2H_0$ comme élément 1-simple, ce qui est équivalent au fait que la restriction du polynome défini sur $\mathfrak{g}_1$ par:

$$\tilde{P}(x) = \det\left(\mathrm{ad}(x)^2/\mathfrak{g}_{-1}\right) \det\left(\mathrm{ad}(x)^4/\mathfrak{g}_{-2}\right)$$

à V est non identiquement nulle [9].

Or

$$\overline{V} \supset \bigoplus_{1 \le j \le m} E_2\left(\overline{h}_j\right) \bigcap_{1 \le k \ne j \le n} E_0\left(\overline{h}_k\right) = W.$$

$(\overline{\mathfrak{g}_0}, \overline{\mathfrak{g}_1})$ étant quasi commutatif, l'espace vectoriel W contient des éléments admettant $2H_0$ comme élément 1-simple au sens de $\overline{\mathfrak{g}_1}$ donc la restriction de $\tilde{P}$ à W est non identiquement nulle d'où la restriction de $\tilde{P}$ à $\overline{V}$ est non identiquement nulle, il en est donc de même de la restriction de $\tilde{P}$ à V ainsi il existe un sl_2-triplet 1-adapté de la forme

$$\left(\sum_{1\le i\le n} x_i, 2H_0, y\right) \qquad avec \qquad x_i \in \mathfrak{g}^{\lambda_i}, 1 \le i \le n$$

il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 6.1. ∎

Dans le reste de ce paragraphe, on donne la liste des préhomogènes faiblement ou quasi-commutatif en indiquant pour chaque système de racines irréductibles Δ la racine simple λ_0 appartenant à Δ_1 comme cela a été indiqué dans la proposition 5.1.1 et on utilise la notation de [9]: (Δ, λ_0).

Ainsi, soit Δ un système de racines irréductible, Σ une base de Δ, λ_0 une racine de Σ, H_0 l'élément défini par $\lambda_0(H_0) = 1$ et pour $\alpha \neq \lambda_0$ appartenant à Σ $\alpha(H_0) = 0$. On définit $\Delta_i = \{\lambda \in \Delta \mid \lambda(H_0) = i\}$ et $\Sigma_0 = \Sigma - \{\lambda_0\}$.

Soit $\Delta^1 = \{$racines orthogonales à $\lambda_0\}$ munit de l'ordre induit par Δ (i.e. $(\Delta^1)^+ = (\Delta^+)^1$,) on note Σ^1 le système de racines simples correspondant à ce choix de racines positives $\lambda_{1,j}$, $1 \le j \le p_1$ sont les racines de Σ^1 qui sont dans Δ_1.

On retrouve ainsi des résultats analogues à la proposition 2.4 de [5].

Si on introduit les notations suivantes:

$$\begin{aligned}(\Delta^1)_0 &= \Delta^1 \cap \Delta_0\\ \Phi_1^+ &= (\Delta^1) - (\Delta^1)_0\\ &= \{\lambda \in \Delta \mid \lambda(H_0) \ge 1 \text{ et } n(\lambda, \lambda_0) = 0\}\end{aligned}$$

on a:

$$(\Delta^1)_0 \cup \Phi_1^+ = \{\lambda \in \Delta \mid \lambda(H_0) \ge 0 \text{ et } n(\lambda, \lambda_0) = 0\}$$

ainsi que:

LEMME 6.3.

(1) $\Sigma_0 \cap \Delta^1$ *est une base de* $(\Delta^1)_0$.

(2) $(\Delta^1)_0 \cup \Phi_1^+$ *est une partie parabolique de* Δ^1.

(3) *Lorsque* $\Delta_3 = \emptyset$, $\Sigma^1 - \Sigma^1 \cap \Sigma_0$ *est constitué de racines deux à deux fortement orthogonales*.

(4) *La sous-algèbre parabolique associée à* $(\Delta^1)_0 \cup \Phi_1^+$ *est maximale dans chaque composante irréductible de l'algèbre* $\mathfrak{U}(h_{\lambda_0})$ *si et seulement si* (Δ, λ_0) *n'est pas de type* (D_n, α_{n-2}) *avec* $n \ge 5$ *ou* (E_6, α_3) *ou* (E_6, α_5) *ou* (E_7, α_6).

Démonstration (cf. la démonstration de la proposition 2.4 de [5]). (1) et (2) sont évidents par construction.

(3) et (4) se vérifient cas par cas.

Notons que la condition $\Delta_3 = \emptyset$ équivaut à la condition suivante: le coefficient de λ_0 dans la décomposition de la plus grande racine selon Σ est inférieur ou égal à deux. ∎

On continue la construction en considérant:

$$\Delta^2 = \left\{\lambda \in \Delta \mid n\left(\lambda_0, \lambda_{1,j}\right) = 0, 1 \leq j \leq p_1\right\}$$

munit de l'ordre induit par Δ, etc. On construit ainsi une suite de racines de Δ_1

$$\lambda_0, \qquad \lambda_{i,j}, \qquad 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i$$

jusqu'à épuisement des racines de Δ_1.

Lorsque $\Delta_3 = \emptyset$, à l'aide du (3) du lemme 6.3 et des cas étudiés, on vérifie que *les racines* λ_0, $\lambda_{i,j}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq p_i$ *sont* 2 *à* 2 *orthogonales*. Cette remarque associée aux propositions 4.4, 5.1.1 et 6.3 permet d'établir immédiatement:

PROPOSITION 6.4. *On suppose que Δ est irréductible et different de G_2 alors pour que (Δ, λ_0) soit associé à un espace préhomogène faiblement commutatif, il faut et il suffit que*

(i) $\Delta_i = \{0\}$ *pour* $i \geq 3$

(ii) *la somme des co-racines associées aux racines* $\{\lambda_0, \lambda_{i,j}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i\}$ *soit égale à* $2H_0$.

Dans ce cas, les racines $\{\lambda_0, \lambda_{i,j}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i\}$ *sont* 1-*minimales si et seulement si elles ont même longueur.*

Donnons une précision supplémentaire sur $\{\lambda_0, \lambda_{i,j}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i\}$

LEMME 6.5. *On suppose que $\Delta_3 = \emptyset$.*

(1) *Les racines* $\lambda_0, \lambda_{i,j}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i$, *ont même longueur si et seulement si* (Δ, λ_0) *n'est pas de type* (G_2, α_2) *ou* $(B_n, \alpha_k), (BC_n, \alpha_k)$ *avec* $(n+1)/2 \leq k \leq n-1$.

(2) *Si* λ_0 *est courte, les racines* $\lambda_0, \lambda_{i,j}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i$, *ne sont pas* 2 *à* 2 *fortement orthogonales.*

Démonstration. On procède par classification en utilisant les planches de [1]. Les démonstrations se font simplement par récurrence sur le rang de Δ. ∎

Proposition 6.6. *Δ étant irréductible, (Δ, λ_0) est associé à un préhomogène faiblement commutatif si et seulement si il figure dans la liste suivante*:

(i) $(A_{2n-1}, \alpha_n), (C_n, \alpha_n), (D_{2n}, \alpha_{2n})$ *ou* $(D_{2n}, \alpha_{2n-1}), (E_7, \alpha_7)$.

(ii) (B_k, α_n) *ou* (D_k, α_n) *avec* $2n < k, (B_{2n}, \alpha_n)$.

(iii) (BC_k, α_n) *ou* (C_k, α_n) *avec* $2n < k, (BC_{2n}, \alpha_n)$.

(iv) $(F_4, \alpha_1), (E_6, \alpha_2), (E_7, \alpha_1)$ *ou* (E_8, α_8).

(v) (B_n, α_n), (BC_n, α_n), (C_{2n}, α_n), (D_{2n}, α_n), (E_7, α_2), (E_8, α_1), (F_4, α_4), (G_2, α_2).

(vi) (B_k, α_n) *avec* $k + 1 \leq 2n \leq 2(k - 1)$.

(vii) (BC_k, α_n) *avec* $k + 1 \leq 2n \leq 2(k - 1)$.

Le préhomogène associé est quasi-commutatif si et seulement si λ_0 est longue pour les cas (i) *à* (v) *et pour* (vi) *lorsque* $2n = k + 1$.

Toutes les racines λ_i sont 1*-minimales sauf dans les cas* (vi) *et* (vii).

(R, λ_0) *est de type* (C_n, α_n) *dans le cas* (i), (B_{2n}, α_n) *dans le cas* (ii), (BC_{2n}, α_n) *dans le cas* (iii), (F_4, α_1) *dans le cas* (iv); $\Delta = R$ *pour chaque cas de* (v), (vi) *et* (vii).

Démonstration. On fait la vérification lorsque $\Delta = G_2$.

Les préhomogènes $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ faiblement commutatifs sont tels que la sous-algèbre parabolique associée à $(\Delta^1)_0 \cup \Phi_1^+$ est maximale dans chaque composante irréductible de l'algèbre $\mathfrak{U}(h_{\lambda_0})$ (cf. la remarque 3.2 et la proposition 5.1.1). On applique alors le (4) du lemme 6.3 qui élimine ainsi un certain nombre de cas. Pour les cas restants, on applique le critère de la proposition 6.4 et le lemme 6.5. ▮

Remarques.

(1) Lorsque $\Delta_i = \emptyset$ pour $i \geq 3$, les systèmes de racines ne convenant pas sont les suivants: (A_n, α_k) avec $2k \neq n - 1, (C_k, \alpha_n)$ ou (D_k, α_n) avec $2n > k, (E_6, \alpha_1), (E_6, \alpha_3), (E_6, \alpha_5), (E_6, \alpha_6), (E_7, \alpha_6)$.

Toutes les racines de Δ_1 ont la même longueur mais la somme des co-racines est différente de $2H_0$.

Pour (A_n, α_k) avec $2k \neq n - 1, (E_6, \alpha_1), (E_6, \alpha_6), (E_7, \alpha_6)$ on a $\Delta_2 = \emptyset$ et donc ils ne sont pas réguliers (lemme 3.1); lorsque $\mathfrak{g}$ est déployée il en est de même pour les cas (E_6, α_3) et (E_6, α_5).

(2) Les cas $(B_n, \alpha_2), (D_n, \alpha_2)$ avec $n \geq 4, (E_6, \alpha_2), (E_7, \alpha_1), (E_8, \alpha_8)$, (F_4, α_1) correspondent aux paraboliques "extraspéciaux" étudiés dans [7].

Corollaire 6.7. *Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est un préhomogène commutatif* (*i.e.* $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ *pour* $i \geq 2$) *régulier tel que $\mathfrak{g}_1$ soit un $\mathfrak{g}_0$-module simple, le système de racines associé est de type (C_n, α_n) avec $n = 2B(H_0, H_0)/B(h, H_0)$, h étant la co-racine d'une racine* 1*-longue de* Δ_1.

Démonstration. Dans la liste donnée dans la proposition 6.6, seul (C_n, α_n) est associé à une graduation vérifiant $R_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$ ce qui montre la première assertion.

La seconde assertion découle de la proposition 5.1.1 et du calcul de $B(2H_0, H_0)$. ∎

La remarque qui suit est une simple application des propositions 6.6 et 6.2, du corollaire 4.6 et du lemme 5.1.3:

Remarque. Lorsque les composantes irréductibles de $(\bar{\mathfrak{g}}_0, \bar{\mathfrak{g}}_1)$ appartiennent à la liste suivante: (A_{2n-1}, α_n), (C_n, α_n), (D_{2n}, α_{2n}) ou (D_{2n}, α_{2n-1}), (E_7, α_7), (B_k, α_n) avec $2n \leq k+1$, (D_k, α_n) avec $2n \leq k$, (E_6, α_2), (E_7, α_1), (E_7, α_2), (E_8, α_1), (E_8, α_8), (F_4, α_1), (G_2, α_2) alors $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est presque commutatif; pour tout h 1-simple il existe une partie I de $\{1, \dots, n\}$ telle que h_I soit dans $G_e.h$. Pour tout I, h_I est 1-simple.

Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ n'a pas de composantes irréductibles de type (B_k, α_n) ou (BC_k, α_n) aved $k+1 \leq 2n \leq 2(k-1)$, h_I et h_J sont dans la même orbite si et seulement si I et J sont dans la même orbite de $\mathbf{Q}$.

Dans le cas particulier où (R, λ_0) est de type (B_n, α_n) ou (BC_n, α_n) ou (C_n, α_n) ou (F_4, α_1) ou (F_4, α_4) il y a n orbites 1-simples de représentants $h_1 + \cdots + h_i$, $1 \leq i \leq n$. Deux éléments 1-simples h et h' sont dans la même orbite si et seulement si $B(h, H_0) = B(h', H_0)$.

Dans le cas particulier où (R, λ_0) est de type (B_n, α_n) ou (BC_n, α_n) ou (C_n, α_n) ou (F_4, α_1) ou (F_4, α_4), il suffit de déterminer $\mathbf{Q}$, plus précisément de montrer que $\mathbf{Q} = \mathfrak{S}_n$ c'est à dire que pour $1 \leq i \neq j \leq n, (\lambda_i - \lambda_j)/2$ est dans R. ∎

REFERENCES

1. N. Bourbaki, "Groupes et algèbres de Lie," Chaps. 4–6, Hermann, Paris, 1968.
2. N. Bourbaki, "Groupes et algèbres de Lie," Chaps. 7 et 8, Hermann, Paris, 1975.
3. R. W. Carter, "Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters," Wiley, New York, 1985.
4. A. Heck, Involutive automorphisms of root systems, *J. Math. Soc. Japan* **36** (1984), 643–658.
5. I. Muller, H. Rubenthaler, et G. Schiffmann, Structure des espaces préhomogènes associés à certaines algèbres de Lie graduées, *Math. Ann.* **274** (1986), 95–123.
6. G. Rohrle, On the structure of parabolic subgroups in algebraic groups, *J. Algebra* **157** (1993), 80–115.

7. G. Rohrle, On extraspecial parabolic subgroups, *Contemp. Math.* **153** (1993), 143–155.
8. R. Richardson, G. Rohrle, et R. Steinberg, Parabolic subgroups with abelian unipotent radical, *Invent. Math.* **110** (1992), 649–671.
9. H. Rubenthaler, ''Espaces préhomogènes de type parabolique,'' Thèse, Université de Strasbourg, 1982.
10. H. Rubenthaler, Espaces vectoriels préhomogènes, sous-groupes paraboliques et sl_2 triplets, *C.R. Acad. Sci. Paris* **290** (1980), 127–129.
11. H. Rubenthaler, Espaces préhomogènes de type parabolique, *Lecture Math. Kyoto Univ.* **14** (1988), 189–221.
12. G. B. Seligman, ''Rational Methods in Lie Algebras,'' Dekker, New York, 1976.
13. E. B. Vinberg, Classification of homogeneous nilpotent elements of a semi-simple graded Lie algebra, *Selecta Math. Soviet.* **6** (1987), 15–35.